1. Metrický prostor

1.1. Definice. Metrickým prostorem budeme nazývat libovolnou množinu X prvků, které nazýváme body, pokud na množině X je dána tzv. *vzdálenost*, což je jakákoliv jednoznačná nezáporná reálná funkce $\varrho(x, y)$, která je definována pro každou dvojici x, $y \in X$ a která splňuje tyto tři podmínky:

1) $\varrho(x, y) = 0$, když a jen když $x = y$;
2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad \forall x, y \in X \quad$ (*symetrie*);
3) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X \quad$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Metrický prostor se obvykle označuje symbolem

$$\mathcal{X} = (X, \varrho).$$

V případech, kdy to nemůže vést k nedorozumění, se metrický prostor označuje stejným symbolem jako množina jeho bodů, tj. symbolem X.

Uvedeme příklady metrických prostorů. V této kapitole se omezíme pouze na ty prostory $\mathcal{X} = (X, \varrho)$, kde množina X není lineární prostor.

1.2. Příklad. Položíme-li pro prvky libovolné množiny

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{v případě } x = y, \\ 1 & \text{v případě } x \neq y, \end{cases}$$

dostaneme metrický prostor. Lze jej nazvat *prostorem izolovaných bodů.*

1.3. Příklad. Množina $\mathbb{Q}^1$ racionálních čísel se vzdáleností

$$\varrho(x, y) = |x - y| \tag{1.1}$$

tvoří metrický prostor Q^1. Platnost prvních dvou axiomů metriky je zřejmá; důkaz trojúhelníkové nerovnosti je také snadný:

$$\varrho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z).$$

1.4. Příklad. Nechť $X = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}^1$ je uzavřený interval. Zavedeme-li na X metriku vztahem (1.1), dostaneme metrický prostor.

1.4. Příklad. Mějme libovolnou turistickou mapu, kde vzdálenost $\varrho(A, B)$ libovolných dvou bodů měříme přiložením měřítka. Trojúhelníková nerovnost

$$\varrho(A, C) \leq \varrho(A, B) + \varrho(B, C)$$

plyne z toho, že délka libovolné strany trojúhelníka není větší než součet délek dvou zbývajících stran.

2. Lineární prostor

2.1. Definice. Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků $x, y, z, \ldots$ a nechť je splněno těchto osm podmínek:

I. Ke každým dvěma prvkům x, $y \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek ležící v $\mathcal{L}$, který je nazývaný jejich *součet* a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto čtyři axiomy:

1. $x + y = y + x$ (*komutativnost*),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativnost*),
3. v $\mathcal{L}$ existuje takový prvek (značíme jej θ), že $x + \theta = x$ pro všechny prvky $x \in \mathcal{L}$ (*existence nulového prvku*),
4. ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ existuje prvek, který značíme $-x$, že $x + (-x) = \theta$ (*existence opačného prvku*). Přitom místo $x + (-x) = \theta$ píšeme prostě $x - x = \theta$. Podobně budeme místo $x + (-y)$ prostě psát $x - y$.

II. Ke každému číslu α nějakého číselného tělesa T a ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha x \in \mathcal{L}$ (tzv. *součin prvku x a čísla α*), přičemž platí tyto dva axiomy:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in T,\ x \in \mathcal{L}$.

III. Obě operace (tj. *sčítání prvků* a *násobení prvku číslem*) jsou svázány těmito dvěma *distributivními zákony*:

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha \in T,\ x, y \in \mathcal{L}$.

Množinu $\mathcal{L}$ potom nazýváme *lineárním* nebo *vektorovým prostorem* nad číselným tělesem T. Podle toho, zda čísly $\alpha, \beta, \ldots$ rozumíme komplexní čísla, resp. reálná čísla, mluvíme krátce o *komplexním*, resp. *reálném lineárním prostoru.* Prvky lineárního prostoru $\mathcal{L}$ často nazýváme *body* nebo *vektory*, kdežto čísla $\alpha, \beta, \ldots$ nazýváme *skaláry.* Všude, kde nebude uvedeno něco jiného, budou naše úvahy platit pro reálné lineární prostory.

Lineární prostor (ať už reálný či komplexní) lze stručně charakterizovat jako komutativní aditivní grupu, na které je definováno násobení skalárem tak, že jsou splněny axiomy II.1, II.2 a III.1, III.2.

V teorii grup se dokazuje, že jak nulový prvek θ, tak opačný prvek $-x$ k libovolnému prvku x existuje pouze jeden. Obě tvrzení vzhledem k jejich důležitosti dokážeme:

2.2. Tvrzení. *V lineárním prostoru existuje právě jeden nulový prvek θ.*

Důkaz. Existence nulového prvku θ je zaručena axiomem I.3. Abychom dokázali jeho jednoznačnost, předpokládejme, že existuje ještě prvek $\theta^* \in \mathcal{L}$ s vlastností

$$x + \theta^* = x \quad \forall x \in \mathcal{L}.$$

Odtud

$$\theta + \theta^* = \theta.$$

Naopak podle axiomu I.3 platí

$$\theta^* + \theta = \theta^*.$$

Vzhledem k axiomu I.1 platí $\theta + \theta^* = \theta^* + \theta$, takže z obou vztahů plyne $\theta^* = \theta$. $\square$

2.3. Tvrzení. *V lineárním prostoru ke každému prvku x existuje právě jeden opačný prvek $-x$.*

Důkaz. Existence opačného prvku $-x$ je zaručena axiomem I.4. Abychom dokázali jeho jednoznačnost, zvolme $x \in \mathcal{L}$ libovolně, ale pevně, zaveďme označení $\overline{x} := -x$ a předpokládejme, že existuje ještě prvek $\overline{x}^* \in \mathcal{L}$ s vlastností

$$x + \overline{x}^* = \theta.$$

S pomocí tohoto vztahu a axiomů I.1, I.2 a I.3 postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{x} = \overline{x} + \theta = \overline{x} + (x + \overline{x}^*) = (\overline{x} + x) + \overline{x}^* = \\ = (x + \overline{x}) + \overline{x}^* = \theta + \overline{x}^* = \overline{x}^* + \theta = \overline{x}^*, \end{aligned}$$

což jsme potřebovali dokázat. □

Někteří (často i renomovaní) autoři jako Taylor [Ta], či Kufner, John, Fučík [KFJ] připojují k osmi axiomům z Definice 1 ještě devátý axiom, který v našem uspořádání je nejvhodnější zařadit do skupiny II:

II.3. $0 \cdot x = \theta \quad 0 \in T \quad \forall x \in \mathcal{L}.$

Dokážeme nyní, že axiom II.3 (jehož tvrzení je pro teorii lineárních prostorů velmi závažné) není v koncepci Definice 2.1 nezávislým axiomem, ale tvrzením, které plyne z Definice 2.1:

2.4. Věta. *Nechť $0 \in T$ je nula (nulový prvek) číselného tělesa T a θ nulový prvek lineárního prostoru $\mathcal{L}$. Potom pro každý prvek $x \in \mathcal{L}$ platí $0 \cdot x = \theta$.*

Důkaz. Zvolme $x \in \mathcal{L}$ libovolně, ale pevně. Pomocí axiomu II.2, vztahu $1 = 1 + 0$ a axiomu III.1 dostaneme

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0)x = x + 0 \cdot x$$

a podle axiomu I.3 platí

$$x + \theta = x.$$

Tyto vztahy dávají

$$x + 0 \cdot x = x + \theta. \tag{2.1}$$

K oběma stranám tohoto vztahu přičtěme opačný prvek $-x$ zleva:

$$-x + (x + 0 \cdot x) = -x + (x + \theta).$$

Podle axiomu I.2

$$(-x + x) + 0 \cdot x = (-x + x) + \theta.$$

Pomocí axiomu I.1 a pak I.4 odtud dostáváme

$$\theta + 0 \cdot x = \theta + \theta.$$

Na levé straně užijeme nejprve axiom I.1 a potom axiom I.3, takže levá strana se rovná $0 \cdot x$; pravá strana je podle axiomu I.3 rovna θ. Dostáváme tedy výsledek $0 \cdot x = \theta$, což jsme chtěli dokázat. □

2.5. Poznámka (první zákon o krácení). Kdybychom znali první zákon o krácení
$$x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z, \tag{2.2}$$
potom by tvrzení $0 \cdot x = \theta$ vyplynulo přímo z (2.1).

Důkaz (2.2) je však snadný: k oběma stranám vztahu stojícího na levé straně implikace (2.2) připočteme $-x$, takže dostaneme:
$$(x + y) - x = (x + z) - x.$$
Obě strany získaného vztahu nyní upravujeme podobně jako jsme upravovali obě strany vztahu (2.1):
$$(x + y) - x = x + (y - x) = x + (-x + y) = (x - x) + y = \theta + y = y + \theta = y.$$
Zcela stejně dostaneme $(x + z) - x = z$. Tedy $y = z$, což jsme chtěli dokázat.

Pomocí Věty 2.4 můžeme odvodit v lineárním prostoru $\mathcal{L}$ konkrétní tvar opačného prvku $-x$ k libovolnému prvku $x \in \mathcal{L}$:

2.6. Věta. *Nechť $x \in \mathcal{L}$ je libovolný prvek. Potom pro jeho opačný prvek platí $-x = (-1) \cdot x$.*

Důkaz. Užijeme-li axiomy II.2 a III.1 v tomto pořadí a pak Větu 2.4, dostaneme
$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = \theta,$$
takže $(-1) \cdot x$ je podle axiomu II.4 opačný prvek k prvku x. $\square$

Nyní dokážeme, že Definice 2.1 je ekvivalentní s touto definicí lineárního prostoru:

2.7. Definice. Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků $x, y, z, \ldots$ a nechť je splněno těchto sedm podmínek:

I. Ke každým dvěma prvkům x, $y \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek ležící v $\mathcal{L}$, který je nazývaný jejich *součet* a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto čtyři axiomy:

1. $x + y = y + x \quad$ (*komutativnost*),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad$ (*asociativnost*),

II. Ke každému číslu α nějakého číselného tělesa T a ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha x \in \mathcal{L}$ (tzv. *součin prvku x a čísla* α), přičemž platí tyto dva axiomy:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in T,\ x \in \mathcal{L}$.

3*. V $\mathcal{L}$ existuje takový prvek Θ, že pro libovolný prvek $x \in \mathcal{L}$ platí $0 \cdot x = \Theta$, kde $0 \in T$ je nula (nulový prvek) tělesa T.

III. Obě operace (tj. *sčítání prvků* a *násobení prvku číslem*) jsou svázány těmito dvěma *distribučními zákony*:

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha \in T,\ x, y \in \mathcal{L}$.

Množinu $\mathcal{L}$ potom nazýváme *lineárním* nebo *vektorovým prostorem* nad číselným tělesem T. Podle toho, zda čísly $\alpha, \beta, \dots$ rozumíme komplexní čísla, resp. reálná čísla, mluvíme krátce o *komplexním*, resp. *reálném lineárním prostoru*. Prvky lineárního prostoru $\mathcal{L}$ často nazýváme *body* nebo *vektory*, kdežto čísla $\alpha, \beta, \dots$ nazýváme *skaláry*.

2.8. Věta. *Definice 2.1 a Definice 2.7 jsou ekvivalentní, přičemž $\Theta = \theta$.*

Důkaz. Vzhledem k Větě 2.4 splňuje lineární prostor $\mathcal{L}$ z Definice 1 všechny podmínky Definice 2.7, přičemž $\Theta = \theta$.

Zbývá dokázat, že lineární prostor z Definice 2.7 je grupa s nulovým prvkem Θ. Co se týče axiomu I.3, dokážeme jej takto:

$$x + \Theta = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x.$$

Nyní dokážeme, že prvek $(-1) \cdot x$ splňuje axiom I.4:

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = \Theta.$$

Jak v případě axiomu I.3, tak axiomu I.4 hraje prvek Θ roli nulového prvku. □

Z hlediska počtu nezávislých axiomů je Definice 2.7 lineárního prostoru optimální.

2.9. Tvrzení. *Platí*

$$-(\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x).$$

Důkaz. Podle Věty 2.6 a axiomů II.1 a II.2

$$-(\alpha x) = (-1) \cdot (\alpha x) = (-1 \cdot \alpha) \cdot x = (\alpha) \cdot x,$$

což je první z dokazovaných vztahů. Podobně

$$(-1 \cdot \alpha) \cdot x = (\alpha \cdot (-1)) \cdot x = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = \alpha \cdot (-x). \qquad \square$$

2.10. Tvrzení. *Pro libovolné prvky $x\,, y \in \mathcal{L}$ existuje právě jeden prvek $z \in \mathcal{L}$ tak, že $z + y = x$; tento prvek se nazývá rozdílem prvků x a y a značí se $z = x - y$.*

Důkaz. Položme $z = x + (-y)$, tj. definujeme z a ukážeme, že tento prvek splňuje Tvrzení 2.10. S pomocí axiomů I.2, I.1, I.4 a I.3 (v tomto pořadí) dostaneme

$$z + y = (x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + (y + (-y)) = x + \theta = x.$$

Kdyby existoval ještě jeden prvek z^* vyhovující podmínce Tvrzení 10 (tj. $z^* + y = x$), potom

$$z^* = z^* + \theta = z^* + (y + (-y)) = (z^* + y) + (-y) = x + (-y) = z. \qquad \square$$

2.11. Tvrzení. *Vztah $x = y$ je ekvivalentní se vztahem $x - y = \theta$.*

Důkaz. a) Jestliže $x = y$, potom

$$x - y = x + (-y) = y + (-y) = \theta.$$

b) Jestliže naopak $x - y = \theta$, potom

$$y = y + (x - y) = [y + (-y)] + x = x + \theta = x. \qquad \square$$

2.12. Tvrzení. *Platí*

$$\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y; \quad (\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x.$$

Důkaz. a) Podle III.2, Věty 2.6 a Tvrzení 2.9

$$\lambda(x - y) = \lambda[x + (-y)] = \lambda x + \lambda(-y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y.$$

b) Podobně, podle III.1, Věty 2.6 a Tvrzení 2.9

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + (-\mu x) = \lambda x - \mu x. \qquad \square$$

2.13. Tvrzení. *Platí $\lambda\theta = \theta$.*

Důkaz. Skutečně,

$$\lambda\theta = \lambda(0 \cdot x) = (\lambda \cdot 0)x = 0 \cdot x = \theta. \qquad \square$$

2.14. Tvrzení. *Pokud $\lambda x = \theta$ a $\lambda \neq 0$, potom $x = \theta$.*

Důkaz. Skutečně,

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta. \qquad \square$$

2.15. Tvrzení (druhý zákon o krácení). *Pokud $\lambda x = \lambda y$ a $\lambda \neq 0$, potom $x = y$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Tvrzení 2.14, Tvrzení 2.12 a Tvrzení 2.11. $\square$

2.16. Tvrzení. *Pokud $\lambda x = \theta$ a $x \neq \theta$, potom $\lambda = 0$.*

Důkaz. Skutečně, kdyby bylo $\lambda \neq 0$, potom by podle Tvrzení 2.14 bylo $x = \theta$. $\square$

2.17. Tvrzení (třetí zákon o krácení). *Pokud $\lambda x = \mu x$ a $x \neq \theta$, potom $\lambda = \mu$.*

Důkaz. $\lambda x = \mu x \Rightarrow \lambda x - \mu x = \theta \Rightarrow (\lambda - \mu)x = \theta \Rightarrow \lambda - \mu = 0.$ $\square$

2.18. Příklad. Lineární prostory, které se nejčastěji studují ve funkcionální analýze a používají v aplikované funkcionální analýze, jsou prostory funkcí. V těchto prostorech je sčítání prvků a násobení prvku skalárem definováno přirozeným způsobem: Nechť $\mathcal{F} = \{f, g, h, \dots\}$ je neprázdná množina funkcí definovaných na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tj.

$$f = f(t), \quad t = (t_1, \dots, t_N) \in \Omega.$$

Součet $f + g$ funkcí f, g a násobek $\lambda \cdot f$ funkce f skalárem λ definujeme takto:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda \cdot f)(t) = \lambda \cdot f(t) \quad \forall t \in \Omega.$$

V této množině je nulovým prvkem funkce, která je identicky rovna nule, tj.

$$\theta(t) = 0 \quad \forall t \in \Omega,$$

a opačnou funkcí k funkci f funkce

$$(-f)(t) = (-1) \cdot f(t) = -f(t) \quad \forall t \in \Omega.$$

Je-li $\mathcal{F}$ např. množina spojitých funkcí na $\overline{\Omega}$, potom při takto zavedeném sčítání funkcí a násobení funkce skalárem je $\mathcal{F}$ lineární prostor, protože jak $f + g$, tak $\lambda \cdot f$ jsou funkce spojité na $\overline{\Omega}$, takže všech osm axiomů Definice 2.1 je splněno. Podobně množina ohraničených funkcí na Ω či množina riemannovsky integrovatelných funkcí na Ω jsou lineární prostory.

3. Normovaný prostor

V lineárním prostoru kromě operace sčítání prvků a operace násobení prvku skalárem se zavádí ještě nějakým způsobem operace limitního přechodu. Nejvhodnější způsob, jak to udělat, je zavést v lineárním prostoru normu.[1]

3.1. Definice. Lineární prostor $\mathcal{L}$ se nazývá *normovaný*, jestliže každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je přiřazeno reálné nezáporné číslo $\|x\|$, které se nazývá *norma* prvku x, přičemž platí:

1. $\|x\| = 0$, když a jen když $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Protože se zabýváme pouze lineárními prostory, budeme normované lineární prostory stručně nazývat *normovanými prostory.*

Snadno je vidět, že každý lineární normovaný prostor je současně metrickým prostorem; stačí položit

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Platnost prvního a druhého axiomu metrického prostoru bezprostředně vyplývá z první vlastnosti normy; třetí axiom snadno pomocí trojúhelníkové nerovnosti pro normu a asociativnosti součtu (viz Definici 2.1, axiom I.2):

$$\begin{aligned}\varrho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \\ \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z).\end{aligned}$$

Uvedeme některé příklady normovaných prostorů.

[1] Později ukážeme, že existují lineární prostory, ve kterých nelze normu zavést, tj. které nelze normovat.

3.2. Příklad. Reálná osa $\mathbb{R}^1$, tj. množina všech reálných čísel s obvyklými aritmetickými operacemi sčítání a násobení, je lineárním prostorem. Prostor $\mathbb{R}^1$ se stane normovaným prostorem, který budeme značit R^1, jestliže pro každé číslo $x \in \mathbb{R}^1$ položíme $\|x\| := |x|$. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti:

$$\|x+y\| = |x+y| \le |x| + |y| = \|x\| + \|y\|.$$

3.3. Příklad. Množina všech uspořádaných n-tic reálných, popř. komplexních čísel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde sčítání n-tic a násobení n-tic konstantou je definováno vztahy

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

je lineárním prostorem, který budeme nazývat *n-rozměrným prostorem.* Nulový prvek je dán vztahem

$$\theta = (0, 0, \dots, 0)$$

a pro opačný prvek platí

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Jde-li o n-tice reálných čísel a jsou-li multiplikativní konstanty také reálná čísla, budeme mluvit o *reálném n-rozměrném prostoru* a používat označení $\mathbb{R}^n$. Jde-li však o n-tice komplexních čísel a jsou-li skaláry také komplexní čísla, budeme mluvit o *komplexním n-rozměrném prostoru* a používat označení $\mathbb{C}^n$. Reálný n-rozměrný prostor je tedy reálným lineárním prostorem a komplexní n-rozměrný prostor komplexním lineárním prostorem.

Normu v reálném n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ s prvky $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme obvykle předpisem

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}; \tag{3.1}$$

je to tzv. *euklidovská* norma. Tím dostáváme normovaný prostor R_2^n. Vztah

$$\varrho_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

definuje v prostoru $\mathbb{R}^n$ euklidovskou metriku. Příslušný metrický prostor budeme značit stejným symbolem jako normovaný prostor, tj. R_2^n.

Dokažme trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou normu (3.1). Užijeme k tomu Cauchy-Buňakovského nerovnost, jejíž důkaz lze najít v Poznámce 4.7:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \,. \tag{3.2}$$

Uvažujme v $\mathbb{R}^n$ body

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Podle (3.2) platí

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \right)^2,$$

odkud po odmocnění dostáváme Minkowského nerovnost (pro $p = 2$)

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{3.3}$$

Odtud vzhledem k (3.1)

$$\|a + b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2.$$

3.4. Příklad. V lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ lze definovat normu také předpisem

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \tag{3.4}$$

v tomto případě vzniklý normovaný prostor značíme symbolem R_1^n. Další důležitý normovaný prostor R_∞^n vznikne, když v $\mathbb{R}^n$ zavedeme normu předpisem

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \tag{3.5}$$

Normy (3.4), (3.5) definují v lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ metriky

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \varrho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Vzniklé metrické prostory značíme stejně jako korespondující normované prostory, tj. symboly R_1^n a R_∞^n.

V komplexním n-rozměrném prostoru $\mathbb{C}^n$ lze zavést normu vztahem

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

nebo kteroukoliv z norem (3.4), (3.5).

Dokažme trojúhelníkovou nerovnost pro normu (3.4):

$$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{n}(|x_k| + |y_k|) \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

V případě normy (3.5) postupujeme při důkazu trojúhelníkové nerovnosti takto: Nechť k_0 je ten z indexů $1, \dots, n$, pro který v případě zvolených prvků x, $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k + y_k| = |x_{k_0} + y_{k_0}|.$$

Platí

$$|x_{k_0} + y_{k_0}| \le |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \le \max_{1\le k\le n} |x_k| + \max_{1\le k\le n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Spojením získaných vztahů dostaneme hledanou trojúhelníkovou nerovnost pro normu (3.5).

3.5. Příklad. V n-rozměrném lineárním prostoru (jak $\mathbb{R}^n$, tak $\mathbb{C}^n$) je možné také definovat normu vektoru x vztahem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \ge 1). \tag{3.6}$$

V případě $\mathbb{R}^n$ tak dostaneme normovaný prostor R_p^n. Normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ a prostory R_1^n, R_2^n, R_∞^n jsou speciálními případy normy $\|x\|_p$ a prostoru R_p^n pro $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Dokázat, že výraz $\|x\|_p$ daný vztahem (3.6) splňuje první dva axiomy normy, je snadné, ale důkaz trojúhelníkové nerovnosti je komplikovaný. Tento důkaz je totožný s důkazem Minkowského nerovnosti pro obecné $p \ge 1$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{3.7}$$

je uveden v kapitole 5. Z (3.7) dostáváme vzhledem k (3.6) hledanou trojúhelníkovou nerovnost

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

3.5a. Poznámka. Platí

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

Tím je vysvětleno, proč v Příkladu 3.5 tvrdíme, že norma $\|x\|_\infty$ je speciálním případem normy $\|x\|_p$. Abychom vztah (3.8) dokázali, zvolme $x \in \mathbb{R}^n$ libovolně, ale pevně, a pišme vztah (3.6) ve tvaru

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le j\le n} |x_j| \left(\sum_{k=1}^{n} |A_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

kde

$$A_k = \frac{x_k}{\max\limits_{1 \le j \le n} |x_j|}.$$

Protože $|A_k| \le 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, přičemž pro alespoň jeden index (označme jej k_0) platí $|A_{k_0}| = 1$, dostáváme

$$\lim_{p \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |A_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Odtud plyne vztah (3.8).

3.6. Příklad (jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ při různých normách). Uveďme, jak bude vypadat jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ daná vztahem

$$\|x\|_p = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{3.9}$$

v případech $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Pro $p = 2$ je to klasická kružnice s poloměrem $r = 1$, pro $p = \infty$ je to čtverec s vrcholy $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$ a pro $p = 1$ čtverec s vrcholy $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

Uvažujeme-li vztah (3.9) pro p spojitě se měnící od $p = 1$ do $p = \infty$, potom graf této „kružnice“ se bude spojitě deformovat od čtverce odpovídajícímu normě $\|x\|_1$ (přes kružnici odpovídající normě $\|x\|_2$) do čtverce odpovídajícímu normě $\|x\|_\infty$.

3.7. Příklad (jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ při různých normách). Uvedeme, jak vypadá jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ daná vztahem

$$\|x\|_p = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.10}$$

v případech $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Pro $p = 2$ je to klasická kulová plocha s poloměrem $r = 1$, pro $p = \infty$ je to povrch krychle s vrcholy $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ a pro $p = 1$ povrch pravidelného osmistěnu s vrcholy $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(-1;0;0)$, $(0;-1;0)$, $(0;0;-1)$, $(0;0;1)$.

Uvažujeme-li vztah (3.10) pro p spojitě se měnící od $p = 1$ do $p = \infty$, potom graf této „kulové plochy“ se bude spojitě deformovat od osmistěnu odpovídajícímu normě $\|x\|_1$ (přes kouli odpovídající normě $\|x\|_2$) do krychle odpovídající normě $\|x\|_\infty$.

3.8. Příklad. Množina všech spojitých reálných funkcí reálné proměnné na segmentu $\langle a, b \rangle$ (popř. spojitých komplexních funkcí reálné proměnné) s běžnými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce číslem (viz Příklad 2.18) je reálný (popř. komplexní) lineární prostor, který je jedním z nejdůležitějších v matematické analýze. Značíme jej $C^0\langle a, b \rangle$.

Definujeme-li v lineárním prostoru $C^0\langle a, b \rangle$ normu vztahem

$$\|f\|_{C^0[a,b]} = \max_{a \le t \le b} |f(t)|, \tag{3.11}$$

dostaneme normovaný prostor, který budeme značit stejným symbolem $C^0\langle a, b \rangle$ jako výchozí lineární prostor. Důkaz, že vztah (3.11) definuje skutečně normu, je snadný. Omezíme se na trojúhelníkovou nerovnost: Zvolme funkce $f, g \in C^0\langle a, b\rangle$ libovolně, ale pevně. Nechť $t_0 \in \langle a, b\rangle$ je číslo, které v případě zvolené dvojice splňuje vztah

$$\max_{a \le t \le b} |f(t) + g(t)| = |f(t_0) + g(t_0)|.$$

Platí

$$|f(t_0) + g(t_0)| \le |f(t_0)| + |g(t_0)| \le \max_{a \le t \le b} |f(t)| + \max_{a \le t \le b} |g(t)|.$$

Spojením získaných vztahů dostáváme vzhledem k (3.11)

$$\|f + g\|_{C^0[a,b]} \le \|f\|_{C^0[a,b]} + \|g\|_{C^0[a,b]}.$$

Metrika korespondující normě (3.11) má tvar

$$\varrho_{C^0[a,b]}(f, g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|.$$

Příslušný metrický prostor opět označujeme symbolem $C^0\langle a, b\rangle$.

3.9. Příklad. Zaveďme na lineárním prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ normu

$$\|f\|_{C^0_2[a,b]} = \left(\int_a^b [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

Tento normovaný prostor budeme značit $C^0_2\langle a, b\rangle$ a nazývat *prostorem spojitých funkcí s kvadratickou normou.* V tomto případě je splnění prvních dvou axiomů vzdálenosti zřejmé; trojúhelníková nerovnost pak vyplývá ze *Schwarzovy nerovnosti* (což je integrální tvar Cauchy-Buňakovského nerovnosti), která zní (viz Poznámku 4.9)

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{3.13}$$

S pomocí (3.13) nalezneme

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x(t) + y(t))^2 \,\mathrm{d}t &= \int_a^b (x(t))^2 \,\mathrm{d}t + \int_a^b (y(t))^2 \,\mathrm{d}t + 2\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t \le \\
&\le \int_a^b (x(t))^2 \,\mathrm{d}t + \int_a^b (y(t))^2 \,\mathrm{d}t + 2\left|\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \\
&\le \int_a^b (x(t))^2 \,\mathrm{d}t + \int_a^b (y(t))^2 \,\mathrm{d}t + 2\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t} = \\
&= \left(\sqrt{\int_a^b (x(t))^2 \,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b (y(t))^2 \,\mathrm{d}t}\right)^2.
\end{aligned}$$

Odmocněním dostáváme Minkowského nerovnost v integrálním tvaru pro $p = 2$:

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) + y(t))^2 \,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_a^b (x(t))^2 \,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b (y(t))^2 \,\mathrm{d}t}. \tag{3.14}$$

Odtud vzhledem k (3.12) dostáváme trojúhelníkovou nerovnost

$$\|f+g\|_{C_2^0[a,b]} \le \|f\|_{C_2^0[a,b]} + \|g\|_{C_2^0[a,b]}.$$

Odpovídající metrika má tvar

$$\varrho_{C_2^0[a,b]}(x,y) = \left(\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Výsledek tohoto příkladu lze získat snadněji s pomocí výsledků kap. 4 takto: Snadno se ověří, že výraz $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ splňuje axiomy skalárního součinu z Definice 4.1. Tedy podle Věty 4.5 je $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ norma, jejíž trojúhelníková nerovnost má v tomto případě tvar Minkowského nerovnosti (3.14).

3.10. Příklad. Prostor l_2 všech posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, které splňují podmínku

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty, \tag{3.16}$$

se stane lineárním normovaným prostorem, definujeme-li, že součet dvou prvků

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{a} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

z l_2 je roven

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

a že součin čísla α a prvku $x \in l_2$ je dán vztahem

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Nulovým prvkem $\theta \in l_2$ je nulová posloupnost a opačným prvkem k prvku x je posloupnost

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n, \dots).$$

Skutečnost, že součet dvou posloupností splňujících podmínku (3.16) také vyhovuje této podmínce, plyne z elementární nerovnosti

$$|a_k + b_k|^2 \le 2|a_k|^2 + 2|b_k|^2.$$

Normu v l_2 definujeme vztahem

$$\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}. \tag{3.17}$$

Že norma (3.17) splňuje první dva axiomy normy, je zřejmé. Dokažme trojúhelníkovou nerovnost: Přejděme v Minkowského nerovnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}$$

k limitě pro $n \to \infty$; dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(y_k + x_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right)^{1/2}. \tag{3.18}$$

Podle (3.16) je pravá strana nerovnosti (3.18) konečná. Pomocí (3.17) můžeme (3.18) přepsat na tvar

$$\|x + y\|_{l_2} \leq \|x\|_{l_2} + \|y\|_{l_2},$$

což je hledaná trojúhelníková nerovnost.

Metrika korespondující normě (3.17) má tvar

$$\varrho_{l_2}(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}.$$

3.11. Příklad. Lineární prostor c sestává ze všech konvergentních posloupností. Lineární prostor c_0 sestává z posloupností $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ reálných čísel, které splňují podmínku

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Sčítání prvků a násobení prvku skalárem se definují v prostorech c a c_0 stejně jako v Příkladu 3.10 a norma je v těchto prostorech dána vztahem

$$\|x\| = \max_{1 \leq n \leq \infty} |x_n|. \tag{3.19}$$

3.12. Příklad. Množina M^∞ všech ohraničených posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ reálných (popř. komplexních) čísel s týmiž operacemi jako v Příkladech 3.10 a 3.11 je lineární prostor. Normu v něm můžeme zavést vztahem

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n|. \tag{3.20}$$

Je třeba poznamenat, že v (3.20) nelze nahradit symbol sup symbolem max: Uvažujme např. posloupnost $\{x_n\}$, kde

$$x_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Potom $\sup |x_n| = \sup x_n = \frac{1}{2}$, kdežto $\max |x_n|$ neexistuje.

4. Skalární součin. Unitární prostor

Obecný lineární prostor nad číselným tělesem T jsme značili $\mathcal{L}$. Je-li $T = \mathbb{R}$ (těleso reálných čísel), budeme značit reálný lineární prostor symbolem $\mathcal{R}$; je-li $T = \mathbb{C}$ (těleso komplexních čísel) budeme značit komplexní lineární prostor symbolem $\mathcal{C}$.

4.1. Definice. *Skalárním součinem v reálném lineárním prostoru $\mathcal{R}$* nazýváme reálnou funkci (x, y), která je definována pro každou dvojici prvků $x,\ y \in \mathcal{R}$ a splňuje tyto podmínky ($x, x_1, x_2, y \in \mathcal{R}$, λ_1, λ_2 jsou reálná čísla):

1. $(x, y) = (y, x)$ (*symetrie*);
2. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ (*linearita*);
3. $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, když a jen když $x = \theta$.

Poznámka. Linearita skalárního součinu je ekvivalentní současné platnosti aditivity a homogenity skalárního součinu, kde

2a. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (*aditivita*);

2b. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (*homogenita*);

Místo podmínky 2 se v definici skalárního součinu někdy uvádějí podmínky 2a, 2b.

4.1.* Definice. *Skalárním součinem v komplexním lineárním prostoru $\mathcal{C}$* nazýváme komplexní funkci (x, y), která je definována pro každou dvojici prvků $x,\ y \in \mathcal{C}$ a splňuje tyto podmínky ($x, x_1, x_2, y \in \mathcal{C}$, λ_1, λ_2 jsou komplexní čísla):

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (*antisymetrie*);
2. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ (*linearita*);
3. $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, když a jen když $x = \theta$.

4.2. Tvrzení. *Skalární součin v komplexním lineárním prostoru má také tyto vlastnosti:*

a) $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}(x, y_1) + \overline{\mu}(x, y_2)$;

b) $(x, \theta) = (\theta, y) = 0$.

Důkaz. a) Podle axiomů 1 a 2 Definice 4.1* a vlastností komplexních čísel platí:

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{(\lambda y_1 + \mu y_2, x)} = \overline{(\lambda y_1, x) + (\mu y_2, x)} =$$
$$= \overline{(\lambda y_1, x)} + \overline{(\mu y_2, x)} = \overline{\lambda}\,\overline{(y_1, x)} + \overline{\mu}\,\overline{(y_2, x)} = \overline{\lambda}(x, y_1) + \overline{\mu}(x, y_2).$$

b) Platí
$$(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0. \qquad \square$$

4.3. Definice. Lineární prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor.*[2] V unitárních prostorech $\mathcal{R}$ a $\mathcal{C}$ se norma zavádí vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}\,. \tag{4.1}$$

Ukážeme, že z podmínek 1 – 3 skalárního součinu plyne, že všechny požadavky kladené na normu jsou přitom splněny.

Skutečně, splnění podmínek 1 a 2 z Definice 3.1 je zřejmé; platnost trojúhelníkové nerovnosti vyplyne ze Schwarzovy nerovnosti, kterou nyní dokážeme:

[2] V angličtině se užívá názvu „Euclidean space“, v češtině se také používá termínu „prostor se skalárním součinem“.

4.4. Věta (Schwarz). *Nechť $\mathcal{U}$ je unitární prostor ($\mathcal{U} = \mathcal{R}$ nebo $\mathcal{U} = \mathcal{C}$). Potom*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{U}. \tag{4.2}$$

Důkaz. a) *Případ reálného unitárního prostoru $\mathcal{U}$*: Mějme tento kvadratický trojčlen reálné proměnné λ, který je podle třetí vlastnosti skalárního součinu nezáporný pro všechny hodnoty λ:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \\ = \|x\|^2\lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Aby tato kvadratická nerovnost byla splněna pro všechna λ (a pro pevnou dvojici x, y, jinak libovolnou), musí mít $\varphi(\lambda)$ buď jeden dvojný reálný kořen, nebo dvojici komplexně sdružených kořenů,[3] tj. diskriminant tohoto kvadratického trojčlenu musí být nekladný:

$$4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 .$$

To je však jinak napsaná nerovnost (4.2).

b) *Případ komplexního unitárního prostoru $\mathcal{U}$*: Uvažujme vztah

$$\begin{aligned} 0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + \lambda \cdot \overline{\lambda}(y, y) = \\ = \|x\|^2 + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Podle třetího axiomu je tento výraz nezáporný pro libovolné λ. Předpokládejme, že $\|y\|^2 = (y, y) > 0$ (v opačném případě je $y = \theta$ a dokazovaná nerovnost je zřejmá) a položme

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{\|y\|^2}.$$

Dosazením do pravé strany (4.4) potom dostaneme

$$\|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0 ,$$

tj. $\|x\|^2\|y\|^2 - |(x, y)|^2 \geq 0$, což dokazuje (4.2). $\square$

Poznamenejme, že postup v části b) důkazu Věty 4.4 lze užít i v části a) téhož důkazu. Postup užitý v části a) je však geometricky velmi názorný.

Vraťme se k důkazu trojúhelníkové nerovnosti a ostatních axiomů pro normu (4.1).

[3] To proto, že graf funkce $\varphi(\lambda)$ je parabola nad vodorovnou osou (kterou probíhá parametr λ), která má s vodorovnou osou společný nanejvýš jeden bod (případný bod dotyku paraboly s vodorovnou osou).

4.5. Věta. *Nechť pro unitární prostor platí buď $\mathcal{U} = \mathcal{R}$, nebo $\mathcal{U} = \mathcal{C}$. Potom výraz $\|x\|$ daný vztahem* (4.1) *splňuje všechny tři axiomy normy uvedené v Definici* 3.1.

Důkaz. a) Jak nezápornost výrazu $\|x\|$ daného vztahem (4.1), tak vlastnost 1 uvedená v Definici 3.1 plynou z vlastnosti 3 uvedené v Definicích 4.1 a 4.1*.

b) Vztah $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ je v případě $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ zřejmý; dokážeme jej proto pouze v případě $\mathcal{U} = \mathcal{C}$:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda}(x, x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x, x)} = |\lambda|\sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

c) Z definice normy, faktu, že výraz $(x, y)+(y, x)$ je reálné číslo, a Věty 4.4 plyne:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + |(x, y) + (y, x)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Odmocněním dostáváme trojúhelníkovou nerovnost. $\square$

4.6. Příklad (skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$). Jestliže $x, y \in \mathbb{R}^n$, potom definujeme

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k. \tag{4.5}$$

V tomto případě se axiomy Definice 4.1 snadno ověří.

Jestliže $x, y \in \mathbb{C}^n$, potom definujeme

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y}_k. \tag{4.6}$$

Také v tomto případě se axiomy Definice 4.1* snadno ověří.

4.7. Poznámka (Cauchy-Buňakovského nerovnost v $\mathbb{R}^n$). Z Věty 4.4 (kde vystupuje vztah (4.2)) a vztahů (4.1) a (4.5) plyne

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}. \tag{4.7}$$

4.8. Příklad (skalární součin v $C_2^0\langle a, b\rangle$). Skalární součin v $C_2^0\langle a, b\rangle$ je definován vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

V tomto případě se axiomy Definice 4.1 snadno ověří.

Zobecníme-li prostor $C_2^0\langle a, b\rangle$ na případ komplexních funkcí reálné proměnné t, potom skalární součin definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.9}$$

Také v tomto případě se axiomy Definice 4.1 snadno ověří.

4.9. Poznámka (Schwarzova nerovnost). Z Věty 4.4 a vztahů (4.1) a (4.8) plyne

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

4.10. Charakteristická vlastnost unitárních prostorů. Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor. Chceme vědět, jaké doplňující podmínky musí splňovat norma definovaná v prostoru $\mathcal{R}$, aby prostor $\mathcal{R}$ byl unitární, tj. aby v něm norma byla definována nějakým skalárním součinem. Jinak řečeno, chceme vědět, jak je třeba charakterizovat unitární prostory v třídě všech normovaných prostorů. Takovou charakteristiku dává tato věta:

4.11. Věta. *Normovaný prostor je unitární, když a jen když pro libovolné dva prvky $f, g \in \mathcal{R}$ platí rovnost*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)\,. \tag{4.11}$$

Důkaz. Nutnost. Nechť $\mathcal{R}$ je unitární prostor. Podle definice normy pomocí skalárního součinu platí

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= (f+g, f+g) + (f-g, f-g) = \\ &= (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) + \\ &+ (f,f) - (f,g) - (g,f) + (g,g) = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)\,.\end{aligned}$$

Dostatečnost podmínky (4.12) se dokazuje obtížněji, a proto odkazujeme čtenáře na [KF2, str. 186-188]. □

4.12. Poznámka. Vztah (4.11) je zobecněním známé vlastnosti rovnoběžníku v rovině: *Součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek jeho stran.* Vzhledem k tomu, že $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, plyne uvedená vlastnost z dvojího užití kosinové věty a následného součtu výsledků.

4.13. Příklad. Mějme prostor R_p^n, v němž je norma definována vztahem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Pro $p \ge 1$ platí všechny axiomy normy, ale unitárním prostorem bude prostor R_p^n pouze pro $p = 2$. Skutečně, mějme v prostoru R_p^n dva vektory

$$f = (1, 1, 0, 0, \dots, 0), \quad g = (1, -1, 0, 0, \dots, 0).$$

Potom

$$f + g = (2, 0, 0, \dots, 0), \quad f - g = (0, 2, 0, \dots, 0).$$

Odtud

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2\,,$$

takže rovnoběžníková identita (4.11) v případě $p \ne 2$ neplatí.

4.14. Příklad. Mějme prostor $C^0\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na segmentu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$. Položme

$$f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t.$$

Platí

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

a

$$\|f + g\| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2}\,,$$

$$\|f - g\| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1\,.$$

Odtud

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)\,.$$

Normu v prostoru $C^0\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$ tedy nelze definovat pomocí žádného skalárního součinu. Zobecněním tohoto příkladu se snadno dokáže, že ani prostor $C^0\left\langle a, b\right\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na libovolném segmentu $\left\langle a, b\right\rangle$ není unitárním prostorem.

4.15. Úhel mezi vektory. Na střední škole jsme si ve fyzice definovali, že práce L, kterou vykoná konstantní síla $\mathbf{F}$ po přímé dráze $\mathbf{s}$ je dána vztahem

$$L = Fs\cos\varphi, \tag{4.12}$$

kde F, resp. s, je velikost síly $\mathbf{F}$, resp. dráhy $\mathbf{s}$, a kde φ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{s}$. V případě, když $\varphi = \frac{\pi}{2}$, jsme říkali, že síla $\mathbf{F}$ po dráze $\mathbf{s}$ žádnou práci nekoná, protože v tomto případě je podle (4.12) $L = 0$. Později jsme se dozvěděli, že práce L je skalárním součinem vektoru síly $\mathbf{F}$ a vektoru dráhy $\mathbf{s}$. Tyto výsledky a vztahy můžeme v případě unitárního prostoru zobecnit takto:

4.16. Definice. Úhel φ mezi dvěma libovolnými prvky x, y unitárního prostoru $\mathcal{U}$ definujeme vztahem

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{4.13}$$

čili

$$\varphi = \arccos\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{4.14}$$

Pokud $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tj. pokud $(x, y) = 0$, potom říkáme, že prvky x, y jsou *ortogonální*.

4.17. Příklad. Není obtížné dokázat, že libovolné dva prvky nekonečného systému funkcí

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots\} \tag{4.15}$$

jsou k sobě ortogonální v prostoru $C_2^0\langle -\pi, \pi\rangle$ i v prostoru $C_2^0\langle c, c + 2\pi\rangle$, kde c je libovolné pevné reálné číslo. Tento výsledek je jedním ze základních nástrojů teorie Fourierových řad, které jste probírali ve 3. semestru.

4.18. Příklad (nemetrizovatelný lineární prostor). V posledních dvou příkladech kapitoly 4 uvedeme příklady lineárních prostorů, ve kterých nelze definovat ani normu, ani metriku, natož skalární součin. Uvažujme rovinu (t, s), kde na vodorovnou osu t nanášíme čas (např. v sekundách) a na svislou osu s polohu (např. v metrech). Grafem rovnoměrného přímočarého pohybu je pak přímka o směrnici c, což je rychlost tohoto pohybu. Nejobecnější rovnice takového pohybu je $s = s_0 + c \cdot t$, kde s_0 je počáteční poloha. Podobně $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ je obecná rovnice rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu, kde s_0 je počáteční poloha, v_0 počáteční rychlost a a zrychlení tohoto pohybu.

Např., známe-li pouze graf pohybu $s = ct$, můžeme rychlost c zjistit pouze tím způsobem, že vypočteme směrnici této přímky pomocí změření souřadnic (t_1, s_1), (t_2, s_2) dvou libovolných bodů této přímky:

$$c = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Pojem úhlu mezi dvěma přímkami v rovině (t, s) nemá smysl, takže nemůžeme určit tangentu úhlu přímky $s = ct$ s vodorovnou osou t. Podobně v rovině (t, s) nelze hovořit o vzdálenosti mezi dvěma body (t_1, s_1), (t_2, s_2), protože každá z obou souřadnic t, s má jiný fyzikální rozměr. *Stručně: Rovina (t, s) nemá vlastnosti euklidovské roviny; vzdálenost a úhel tam nemají smysl – v takové rovině má však smysl pojem rovnoběžnosti přímek či směrnice přímky.*

4.19. Příklad. Podobně, měříme-li závislost nějaké délkové veličiny na jiné délkové veličině a v rovině (x, y) nanášíme každou z těchto veličin v jiném měřítku, pracujeme v neeuklidovském dvojrozměrném lineárním prostoru. Pojem vzdálenost dvou bodů a úhel mezi přímkami nemá v tomto prostoru opět smysl.

4.20. Poznámka. Rovinu (t, s) z Příkladu 14.18 můžeme také interpretovat jinak, totiž jako grafické zobrazení funkcí typu $s = s(t)$. Potom ovšem funkce $s(t)$ náleží jak do prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, tak prostoru $C^0_2\langle a, b\rangle$, kde $\langle a, b\rangle$ je nějaký interval na ose t.

5. Hölderova nerovnost. Minkowského nerovnost

5.1. Lemma. *Nechť čísla $p > 1$, $q > 1$ splňují vztah*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.1}$$

Potom pro $a > 0$, $b > 0$ platí

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{5.2}$$

Důkaz. V rovině (ξ, η) uvažujme křivku danou rovnicí

$$\eta = \xi^{p-1}. \tag{5.3}$$

Z (5.1) plyne

$$q = \frac{p}{p-1}, \tag{5.4}$$

takže $q - 1 = 1/(p-1)$, což nám umožňuje přepsat (5.3) na tvar

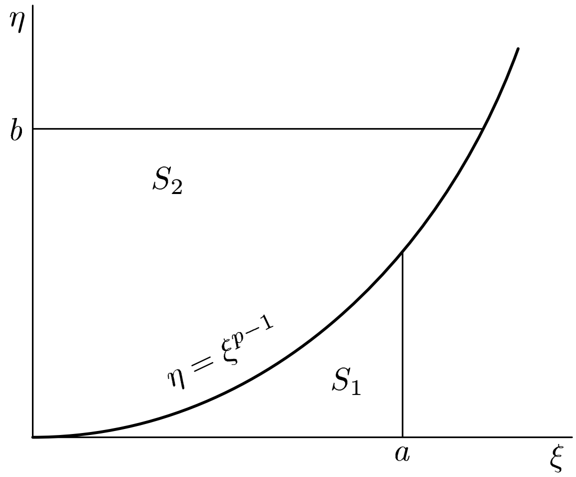
$$\xi = \eta^{q-1}. \tag{5.5}$$

Nechť S_1 je obrazec (křivočarý trojúhelník) ohraničený úsečkami OA, AA_1 a obloukem OA_1, kde (viz Obr. 5.1)

$$O = [0,0],\ A = [a,0],\ A_1 = [a, a^{p-1}],$$

a S_2 křivočarý trojúhelník ohraničený úsečkami OB, BB_1 a obloukem OB_1, kde (viz Obr. 5.1)

$$B = [0,b],\ B_1 = [b^{q-1}, b].$$



Obr. 5.1

Pokud

$$b = a^{p-1} \quad \text{čili} \quad a = b^{\frac{1}{p-1}} = b^{q-1}, \tag{5.6}$$

potom

$$ab = S_1 + S_2.$$

Pokud (5.6) neplatí, tak $ab < S_1 + S_2$. Tedy vždy

$$ab \le S_1 + S_2. \tag{5.7}$$

Platí

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\,\mathrm{d}\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Odtud a z (5.7) plyne (5.2). Zajímavé na tomto důkazu je, že algebraický výsledek je zde získán pouze pomocí matematické analýzy. $\square$

5.2. Věta (diskrétní Hölderova nerovnost). *Nechť čísla* $p > 1$, $q > 1$ *splňují vztah* (5.1). *Potom*

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.8}$$

Důkaz. Položme

$$a = \frac{|x_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|y_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

dosaďme tyto výrazy do (5.2) a získanou nerovnost sečtěme od $k = 1$ do $k = n$. Na pravé straně vznikne výraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, který je vzhledem k (5.1) roven jedné. Vynásobíme-li vzniklý vztah výrazem v jmenovateli na levé straně, dostaneme (5.8). □

Ve Větách 5.3 – 5.5 je užit symbol $L_p(\Omega)$. Značí množinu funkcí, pro které

$$\int_\Omega |f(X)|^p \, \mathrm{d}X < \infty,$$

přičemž $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ a integrál je brán v Lebesgueově smyslu. Protože Lebesgueův integrál bude probírán později (včetně prostorů $L_p(\Omega)$, kde $p \geq 1$), poznamenejme alespoň, že *funkce integrovatelná v Riemannově smyslu je integrovatelná i v Lebesgueově smyslu a oba integrály se sobě rovnají.* S tímto poznatkem v této kapitole vystačíme: můžeme si pod uvedenými integrály představovat pouze Riemannovy integrály.

5.3. Věta (Hölderova nerovnost). *Nechť čísla $p > 1$, $q > 1$ splňují vztah (5.1) a $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$. Potom $f \cdot g \in L_1(\Omega)$ a platí*

$$\Big| \int_\Omega f(X)g(X) \, \mathrm{d}X \Big| \leq \int_\Omega \Big| f(X)g(X) \Big| \, \mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g), \tag{5.9}$$

kde

$$\mathcal{N}_p(f) = \Big(\int_\Omega |f(X)|^p \, \mathrm{d}X \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \mathcal{N}_q(g) = \Big(\int_\Omega |g(X)|^q \, \mathrm{d}X \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.10}$$

Důkaz. Postupujeme podobně jako v předchozím důkazu: Položíme

$$a = \frac{|f(X)|}{\mathcal{N}_p(f)}, \quad b = \frac{|g(X)|}{\mathcal{N}_q(g)}.$$

a dosadíme tyto výrazy do (5.2). Dostaneme

$$\frac{|f(X)|}{\mathcal{N}_p(f)} \cdot \frac{|g(X)|}{\mathcal{N}_q(g)} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(X)|^p}{[\mathcal{N}_p(f)]^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(X)|^q}{[\mathcal{N}_q(g)]^q} \tag{5.11}$$

pro všechna $X \in \Omega$, kde jsou funkce f a g definovány, tj. pro téměř všechna $X \in \Omega$. Integrujeme-li (5.11) přes Ω, dostaneme (5.9), protože platí (5.1). □

5.4. Důsledek (Schwarzova nerovnost v $L_2(\Omega)$). *Pro $u, v \in L_2(\Omega)$ platí*

$$|(u, v)_{0,\Omega}| \le \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} \,.$$

Důkaz. Stačí položit v Hölderově nerovnosti $p = q = 2$. $\square$

5.5. Věta (zobecněná Hölderova nerovnost). *Nechť čísla $p_i > 1$ $(i = 1, \dots, n)$ splňují vztah*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1. \tag{5.12}$$

Potom pro $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$ $(i = 1, \dots, n)$ platí

$$f_1 f_2 \dots f_n \in L_1(\Omega),$$

$$\int_\Omega |f_1(X) f_2(X) \dots f_n(X)| \, \mathrm{d}X \le \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2) \dots \mathcal{N}_{p_n}(f_n). \tag{5.13}$$

Mimo jiné, když $f_1, \dots, f_n \in L_n(\Omega)$, potom

$$f_1 f_2 \dots f_n \in L_1(\Omega),$$

$$\int_\Omega |f_1(X) f_2(X) \dots f_n(X)| \, \mathrm{d}X \le \mathcal{N}_n(f_1) \mathcal{N}_n(f_2) \dots \mathcal{N}_n(f_n).$$

Důkaz. Větu dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 2$ byla dokázána ve Větě 5.3. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$.

Abychom mohli využít náš indukční předpoklad, položme

$$\frac{1}{p} := \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \quad \text{čili} \quad p = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \tag{5.14}$$

a dokažme, že pro funkci $f = f_1 f_2$ platí $f \in L_p(\Omega)$. Za tím účelem položme

$$g_1 := |f_1|^p, \quad g_2 := |f_2|^p \tag{5.15}$$

a definujme čísla r_1, r_2 vztahy

$$p r_1 = p_1, \quad p r_2 = p_2 \quad \text{čili} \quad r_1 = \frac{p_1}{p} = \frac{p_1 + p_2}{p_2}, \quad r_2 = \frac{p_2}{p} = \frac{p_1 + p_2}{p_1}, \tag{5.16}$$

Z posledních dvou vztahů (5.16) plyne, že $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$. Dále, protože $f_1 \in L_{p_1}(\Omega)$, $f_2 \in L_{p_2}(\Omega)$, z (5.15) a prvních dvou vztahů (5.16) plyne, že $g_1 \in L_{r_1}(\Omega)$, $g_2 \in L_{r_2}(\Omega)$, takže funkce g_1, g_2 splňují všechny předpoklady Hölderovy nerovnosti a platí

$$g_1 g_2 = |f_1 f_2|^p \in L_1(\Omega),$$

$$\int_\Omega |f_1 f_2|^p \, \mathrm{d}X = \int_\Omega |g_1 g_2| \, \mathrm{d}X \le \mathcal{N}_{r_1}(g_1) \mathcal{N}_{r_2}(g_2) < \infty. \tag{5.17}$$

Tedy $f = f_1 f_2 \in L_p(\Omega)$. Předpoklad (5.12) přepišme na tvar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

a aplikujme indukční předpoklad na funkce

$$f \in L_p(\Omega), f_3 \in L_{p_3}(\Omega), \ldots, f_n \in L_{p_n}(\Omega).$$

Dostaneme

$$\int_\Omega |(f_1 f_2) f_3 \ldots f_n| \, \mathrm{d}X \le \mathcal{N}_p(f_1 f_2) \mathcal{N}_{p_3}(f_3) \ldots \mathcal{N}_{p_n}(f_n). \tag{5.18}$$

Věta 5.5 bude dokázána, jestliže ukážeme, že

$$\mathcal{N}_p(f_1 f_2) \le \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2). \tag{5.19}$$

Z (5.17) a (5.15), (5.16) plyne

$$[\mathcal{N}_p(f_1 f_2)]^p = \int_\Omega |f_1 f_2|^p \, \mathrm{d}X \le \mathcal{N}_{r_1}(|f_1|^p) \mathcal{N}_{r_2}(|f_2|^p) =$$

$$= \Big(\int_\Omega |f_1|^{pr_1} \, \mathrm{d}X \Big)^{\frac{1}{r_1}} \Big(\int_\Omega |f_2|^{pr_2} \, \mathrm{d}X \Big)^{\frac{1}{r_2}} = \Big(\int_\Omega |f_1|^{p_1} \, \mathrm{d}X \Big)^{\frac{p}{p_1}} \Big(\int_\Omega |f_2|^{p_2} \, \mathrm{d}X \Big)^{\frac{p}{p_2}}.$$

Přejdeme-li v tomto výsledku k p-té odmocnině, dostaneme (5.19). Tedy z (5.18) plyne (5.13). □

5.6. Věta (Minkowského nerovnost). *Pro $p \ge 1$ platí*

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.20}$$

Důkaz. Pro $p = 1$ je Minkowského nerovnost zřejmá (absolutní hodnota součtu není větší než součet absolutních hodnot sčítanců).

Nechť tedy $p > 1$. Vyjděme z identity

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}(|a| + |b|) = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|,$$

pišme v ní a_k místo a a b_k místo b a sečtěme takto vzniklé rovnosti podle k od 1 do n; dostaneme

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Aplikujeme-li nyní Hölderovu nerovnost (5.8) na oba součty na pravé straně a využijeme-li vztahu $(p-1)q = p$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \le \left[\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right]^{\frac{1}{q}} \left[\Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Položíme-li

$$A = \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p, \tag{*}$$

potom můžeme poslední nerovnost napsat ve tvaru

$$A \leq A^{-\frac{1}{q}} \left[\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Násobme obě strany této nerovnosti výrazem $A^{-\frac{1}{q}}$. Dostaneme

$$A^{1-\frac{1}{q}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Protože $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, dostáváme odtud s užitím (*)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

odkud ihned plyne nerovnost (5.20), protože $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$. □

5.7. Věta (Minkowského nerovnost v integrálním tvaru). *Nechť $p \geq 1$. Potom pro libovolné funkce f a g, pro něž integrály na pravé straně* (5.21) *mají smysl,*[1] *platí*

$$\left[\int_\Omega |f(X) + g(X)|^p \, \mathrm{d}X \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_\Omega |f(X)|^p \, \mathrm{d}X \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |g(X)|^p \, \mathrm{d}X \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{5.21}$$

Důkaz probíhá analogicky jako důkaz Věty 5.6; pouze místo Hölderovy nerovnosti (5.8) užijeme Hölderovu nerovnost (5.9). □

5.8. Příklad. Nechť l_p je lineární prostor, jehož prvky jsou všechny posloupnosti reálných (resp. komplexních) čísel

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

pro něž platí podmínka

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \tag{5.22}$$

kde $p \geq 1$ je dané číslo. Definujme normu $\|x\|_{l_p}$ v lineárním prostoru l_p vztahem

$$\|x\|_{l_p} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \tag{5.23}$$

[1] Nerovnost (5.21) platí pro všechny funkce $f, g \in L_2(\Omega)$.

a prověřme všechny tři axiomy normy. Podle Minkowského nerovnosti (5.20) pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Protože řady

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p$$

podle předpokladu (5.22) konvergují, dostaneme po limitním přechodu pro $n \to \infty$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Vzhledem k (5.23) můžeme napsat tuto nerovnost ve tvaru trojúhelníkové nerovnosti

$$\|x+y\|_{l_p} \leq \|x\|_{l_p} + \|y\|_{l_p}.$$

Zbývající dva axiomy se ověří v případě normy (5.23) snadno.

5.9. Příklad. Na lineárním prostoru $C^0\langle a,b\rangle$ zaveďme normu předpisem

$$\|f\|_{C_p^0[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.24}$$

Dostaneme tak normovaný prostor $C_p^0\langle a,b\rangle$. Ověřme, že (5.24) skutečně splňuje všechny tři axiomy normy. Platnost prvních dvou axiomů je evidentní; co se týče trojúhelníkové nerovnosti, podle Věty 5.7 platí

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

čili podle (5.24)

$$\|f+g\|_{C_p^0[a,b]} \leq \|f\|_{C_p^0[a,b]} + \|g\|_{C_p^0[a,b]},$$

což jsme chtěli dokázat.

6. Konvergentní posloupnosti. Uzavřené a otevřené množiny

6.1. Definice. *Otevřenou koulí* $S(x_0, r)$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in \mathcal{X}$, které vyhovují podmínce

$$\varrho(x, x_0) < r\,.$$

Pevný bod x_0 se nazývá *středem* a číslo r *poloměrem* této koule.

Uzavřenou koulí $S[x_0, r]$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in \mathcal{X}$, které vyhovují podmínce

$$\varrho(x, x_0) \leq r\,.$$

Otevřenou kouli poloměru ε se středem x_0 budeme také nazývat ε-*okolím* bodu x_0 a značit symbolem $O_\varepsilon(x_0)$. $\square$

6.2. Definice. Bod x nazýváme *vnitřním bodem množiny* M, existuje-li okolí $O_\varepsilon(x)$ tohoto bodu, které je celé obsažené v množině M. Množinu, jejíž všechny body jsou vnitřní, nazýváme *otevřenou.*

6.3. Definice. Bod x_0 metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ se nazývá *hromadným bodem* množiny $M \subset X$, jestliže jeho *libovolné* okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny M různý od bodu x_0.

Bod x náležející množině M se nazývá *izolovaným bodem* této množiny, jestliže existuje okolí $O_\varepsilon(x)$, které neobsahuje žádné body z M různé od x.

6.3a. Poznámka. 1) Samotný hromadný bod x_0 může, ale nemusí náležet množině M.

2) Jestliže x_0 je hromadným bodem množiny M, potom každé okolí $O_\varepsilon(x_0)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M.

3) Jestliže bod x_0 náleží množině M, ale není jejím hromadným bodem, tak je *izolovaným* bodem množiny M.

6.4. Příklad. Hromadný bod může, ale nemusí náležet množině M. Například, je-li M množina racionálních čísel náležejících segmentu $\langle 0, 1\rangle$, potom každý bod tohoto segmentu je hromadným bodem množiny M.

6.5. Definice. a) Nechť $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$. Říkáme, že *tato posloupnost konverguje k bodu* $x \in \mathcal{X}$, jestliže každé ε-okolí $O_\varepsilon(x)$ bodu x obsahuje všechny body x_n počínaje od některého indexu $N(\varepsilon)$, tj. jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že okolí $O_\varepsilon(x)$ obsahuje všechny body x_n, kde $n \geq N(\varepsilon)$. Bod x se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_n\}$.

b) Tuto definici lze vyslovit také takto: Posloupnost $\{x_n\}$ metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže pro číselnou posloupnost $\{\varrho(x, x_n)\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0\,,$$

tj. jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro všechna $n \geq N(\varepsilon)$. $\square$

6.5a. Poznámka. V případě normovaného prostoru $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ má část a) Definice 6.5 tento tvar: Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v normovaném prostoru $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$. Říkáme, že *tato posloupnost konverguje k bodu* $x \in \mathcal{L}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon). \tag{6.1}$$

Bod x se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_n\}$.

Tato definice se liší od definice limity posloupnosti známé ze základů matematické analýzy pouze tím, že místo absolutní hodnoty vystupuje v (6.1) norma $\|\cdot\|$.

6.6. Tvrzení. *Žádná posloupnost nemůže mít dvě různé limity.*

Důkaz. Nechť x a y jsou dvě limity posloupnosti $\{x_n\}$, tj.

$$\lim_{\varrho\to\infty}(x_n, x) = 0, \qquad \lim_{\varrho\to\infty}(x_n, y) = 0.$$

Potom podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) \to 0,$$

takže (vzhledem k tomu, že prvky x, y jsou pevné) $\varrho(x, y) = 0$, což je ekvivalentní se vztahem $x = y$. $\square$

6.7. Tvrzení. *Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu x, potom každá její podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ (tj. posloupnost vybraná z posloupnosti $\{x_n\}$) konverguje k témuž bodu x.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom (podle Definice 6.5) existuje $N(\varepsilon)$ tak, že $x_n \in O_\varepsilon(x)$ pro všechna $n \geq N(\varepsilon)$. Potom také (protože $\{n_k\} \subset \{n\}$) $x_{n_k} \in O_\varepsilon(x)$ pro všechna $n_k \geq N(\varepsilon)$, což znamená, že $\lim\limits_{n_k\to\infty} \varrho(x_{n_k}, x) = 0$. $\square$

6.8. Věta. *Aby bod $x_0 \in X$ byl hromadným bodem množiny $M \subset X$, je nutné a stačí, aby z této množiny bylo možno vydělit posloupnost různých bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ takovou, že*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0.$$

Věta 6.8 dovoluje říci Definici 6.3 v jiném tvaru:

6.9. Definice. Bod $x_0 \in X$ se nazývá hromadným bodem množiny $M \subset X$, jestliže z této množiny je možno vydělit posloupnost různých bodů $\{x_n\}$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0.$$

S pomocí pojmu „hromadný bod“ zavedeme pojem *uzavřená množina.*

6.10. Definice. 1. Množina všech hromadných bodů množiny M metrického prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *derivací množiny* M a značí se M'.

2. Je-li $M' \subset M$, potom množinu M nazýváme *uzavřenou.* (Jinými slovy: Uzavřenou nazýváme takovou množinu, která obsahuje všechny svoje hromadné body.)

3. Množinu $M \cup M'$ nazýváme *uzávěrem* množiny M a značíme symbolem $\overline{M}$.

6.10a. Poznámka. Uzavřená množina může obsahovat izolované body. Uzavřenou množinu, která neobsahuje izolované body, nazýváme *dokonalá množina.*

6.11. Příklady. Uvažujme metrický prostor $R^1 = (\mathbb{R}, \varrho(x, y) = |x - y|)$.
1. $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset \mathbb{R}^1$, $M' = \{0\}$; M je neuzavřená.
2. $M = (a, b)$, $M' = \langle a, b\rangle$; M je neuzavřená.
3. $M = \langle a, b\rangle$, $M' = \langle a, b\rangle$; M je dokonalá (uzavřená, bez izolovaných bodů).
4. $M = \mathbb{R}$, $M' = \mathbb{R}$; tedy množina všech reálných čísel je dokonalá.
5. $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\}$, $M' = \{0\}$; M je uzavřená.
6. $M = \mathbb{Q}$ (množina všech racionálních čísel), $M' = \mathbb{R}$, tedy $\mathbb{Q}$ je neuzavřená.
7. $M = \emptyset$, $M' = \emptyset$ - prázdná množina je dokonalá.
8. $M =$ konečná množina, $M' = \emptyset$; každá konečná množina je uzavřená.

Platí tyto důležité věty:

6.12. Věta. *Aby množina M byla uzavřená, je nutné a stačí, aby byla rovna svému uzávěru:*

$$M = \overline{M}\,.$$

6.13. Věta. *a) Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.*

b) Průnik libovolné množiny (konečné či nekonečné) uzavřených množin je uzavřená množina.

6.13a. Poznámka. Sjednocení nekonečné množiny uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Například mějme množiny

$$F_n = \left\langle \tfrac{1}{n}, 1\right\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Všechny F_n jsou uzavřené, ale jejich sjednocení

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1\rangle$$

není uzavřená množina.

6.14. Poznámka. *Každý metrický prostor je uzavřený (v sobě).* Vysvětleme tento na první pohled překvapivý fakt na případě metrického prostoru

$$\mathcal{X} = (X = (0, 1\rangle,\ \varrho(x, y) = |x - y|). \tag{6.2}$$

Každý bod intervalu $X = (0, 1\rangle$ (polootevřeného, je-li uvažován jako podmnožina množiny $\mathbb{R}$ reálných čísel) se dá vyjádřit jako limita posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ navzájem různých bodů. Protože $x_0 = 0 \notin X$, pro množinu $M = X$ platí vzhledem k Definicím 6.9 a 6.10, že $M' = M$ (a ne $M' \supset M$). Tedy množina $M = X$ je uzavřená v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ (je v něm dokonce dokonalá).

Můžeme to říci ještě jinak: Žádná posloupnost $\{x_n\} \subset X$, která v $\mathbb{R}$ konverguje k prvku $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ (jako např. posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$), není v prostoru (6.2) konvergentní. Tedy $X' = X$.

V případě otevřených množin platí tato věta:

6.15. Věta. *a) Sjednocení libovolné množiny (konečné či nekonečné) otevřených množin je otevřenou množinou.*

b) Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

6.15a. Poznámka. Průnik nekonečné množiny otevřených množin nemusí být otevřenou množinou: Mějme např. systém množin

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Všechny G_n jsou otevřené, ale jejich průnik je uzavřená množina

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\} .$$

Z části a) Věty 6.15 plyne tento důsledek týkající se struktury otevřených množin v $\mathbb{R}^1$:

6.16. Důsledek. *Libovolná množina v $\mathbb{R}^1$, která se dá vyjádřit ve tvaru sjednocení otevřených intervalů, je otevřená.*

6.17. Příklady.

1. Každý interval (a, b) je otevřená množina.
2. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je otevřená (víme, že je také uzavřená).
3. Prázdná množina $\emptyset$ je otevřená (víme, že je také uzavřená).
4. Segment $\langle a, b\rangle$ není otevřenou množinou, protože jeho konce nejsou vnitřními body.

6.18. Definice. Nechť A a B jsou dvě množiny v metrickém prostoru $\mathcal{X}$. Množinu A nazýváme *hustou* v B, jestliže $\overline{A} \supseteq B$. Speciálně, množina A se nazývá *všude hustou v $\mathcal{X}$*, jestliže $\overline{A} = \mathcal{X}$. (Například, množina racionálních čísel je všude hustá na číselné přímce $\mathbb{R}$.)

6.19. Definice. Metrický prostor $\mathcal{X}$, který obsahuje všude hustou *spočetnou* množinu, se nazývá *separabilní*.

6.20. Příklady separabilních metrických prostorů. a) Prostor izolovaných bodů,který je uveden v příkladu 1.2, je separabilní, právě když je vytvořen ze spočetně mnoha bodů. V tomto prostoru totiž uzávěr $\overline{M}$ libovolné množiny M je totožný s množinou M.

Všechny metrické prostory uvedené v příkladech b) – f) jsou separabilní. Pro každý z těchto prostorů uvádíme všude hustou množinu; detaily důkazů přenecháváme čtenáři:

b) V metrickém prostoru R^1 je všude hustou množinou množina racionálních čísel.

c) V metrickém prostoru R^n_p je všude hustou množinou množina n-rozměrných vektorů $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s racionálními souřadnicemi.

d) V metrickém prostoru R^n_∞ je všude hustou množinou množina n-rozměrných vektorů $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s racionálními souřadnicemi.

e) V metrických prostorech $C^0\langle a,b\rangle$ a $C_2^0\langle a,b\rangle$ je všude hustou množinou množina polynomů s racionálními koeficienty.

f) V metrickém prostoru l_2 je všude hustou množinou množina všech posloupností $\{x_n\}$, kde x_n jsou racionální čísla, přičemž počet čísel x_n různých od nuly je pouze konečný a pro různé posloupnosti obecně různý.

6.21. Příklad neseparabilního metrického prostoru. Metrický prostor M^∞ všech ohraničených posloupností uvedený v příkladu 3.12 není separabilní: Platí totiž, že všechny posloupnosti vytvořené z nul a jedniček tvoří množinu mohutnosti kontinua (tj. nespočetnou množinu). Vzdálenost dvou takových od sebe různých bodů prostoru M^∞, definovaná podle (3.20) vztahem

$$\varrho(x,y) = \sup_{1\le n\le\infty} |x_n - y_n|,$$

se rovná jedné. Kolem každého z těchto bodů sestrojíme otevřenou kouli o poloměru $\frac{1}{2}$. Tyto koule jsou disjunktní. Je-li nějaká množina A všude hustá v M^∞, potom každá ze sestrojených koulí musí obsahovat alespoň jeden bod množiny A, takže množina A nemůže být spočetná.

7. Struktura otevřených a uzavřených ohraničených množin na přímce $\mathbb{R}^1$

7.1. Věta. *Každá neprázdná ohraničená otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^1$ je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních intervalů, jejichž konce nenáležejí množině G:*

$$G = \bigcup_k (\lambda_k, \mu_k) \quad (\lambda_k \notin G,\ \mu_k \notin G).$$

7.2. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^1$ je otevřená množina. Jestliže interval (a,b) je obsažen v G, ale jeho konce této množině nenáležejí,

$$(a,b) \subset G, \quad a \notin G, \quad b \notin G,$$

pak budeme tento interval nazývat *vytvořujícím intervalem* množiny G.

7.3. Věta. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^1$ je neprázdná ohraničená otevřená množina a (a,b) interval obsažený v G. V tomto případě se najde mezi vytvořujícími intervaly množiny G takový, který obsahuje v sobě interval (a,b).*

Při popisu struktury uzavřených ohraničených množin v $\mathbb{R}^1$ budeme potřebovat pojem *komplement množiny.*

7.4. Definice. Nechť E a S jsou dvě bodové množiny. Je-li $E \subset S$, potom množina $S - E$ se nazývá *komplementem* (*doplňkem*) *množiny E do množiny S* a značí se

$$C_S E\,.$$

Speciálně, množina $C_\mathbb{R} E$, kde $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, se prostě nazývá *komplementem* množiny E a značí se

$$CE\,.$$

7.5. Věta. *Je-li množina G otevřená, potom její komplement CG je uzavřená množina.*

7.6. Věta. *Je-li množina F uzavřená, potom její komplement CF je otevřená množina.*

7.7. Příklad. Každá ze vzájemně komplementárních množin Z a $\emptyset$ je současně uzavřená a otevřená.

7.8. Definice. Nechť E je neprázdná ohraničená množina a nechť $a = \inf E$, $b = \sup E$. Segment $S = \langle a, b\rangle$ se nazývá *nejmenším segmentem* obsahujícím množinu E.

7.9. Věta. *Je-li S nejmenší segment obsahující ohraničenou* uzavřenou *množinu F, potom množina*

$$C_S F = \langle a, b\rangle - F$$

je otevřená.

Nyní můžeme přejít ke studiu struktury *uzavřených* ohraničených množin. Nechť F je taková množina a S nejmenší segment, obsahující F. Jak víme, množina $C_S F$ je otevřená. Je-li tato množina neprázdná, tak je na ní možno užít větu 7.1. Proto platí následující věta.

7.10. Věta. *Neprázdná ohraničená uzavřená množina F je buď segmentem, nebo se získá z nějakého segmentu odebráním konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních intervalů, jejichž konce náležejí množině F.*

Vytvořující intervaly množiny $C_S F$ se nazývají *doplňkovými* intervaly množiny F.

Protože dokonalá množina je uzavřená, tak i pro ni platí věta 7.10. Zbývá vyjasnit, jaké požadavky je třeba položit na doplňkové intervaly uzavřené množiny, aby byla dokonalá. Odpověď na tuto otázku dává následující věta.

7.11. Věta. *Nechť F je neprázdná ohraničená* uzavřená *množina a $S = \langle a, b\rangle$ nejmenší segment obsahující F. Potom*

1. *Bod x_0, který je společným koncem dvou doplňkových intervalů, je izolovaným bodem množiny F.*
2. *Je-li bod a (nebo b) koncem jednoho z doplňkových intervalů množiny F, tak je izolovaným bodem množiny F.*
3. *Žádné jiné izolované body (kromě uvedených v částech 1 a 2) množina F nemá.*

Z této věty plyne následující věta:

7.12. Věta. *Každá neprázdná ohraničená* dokonalá *množina P je buď segmentem nebo se získá z některého segmentu odebráním konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních intervalů, které nemají společné koncové body ani jeden s druhým, ani s původním segmentem. Obráceně, každá množina, získaná tímto způsobem, je dokonalá.*

Příklad velmi zajímavé dokonalé množiny v $\mathbb{R}^1$ je tzv. *Cantorovo diskontinuum* P_0 (viz [Že1, str. 38–43]).

8. Struktura otevřených a uzavřených ohraničených množin v $\mathbb{R}^n$ $(2 \leq n \leq 3)$

Struktura otevřených dvojrozměrných množin je složitější než u jednorozměrných. Neexistuje zde pojem odpovídající „vytvořujícímu intervalu". Následující věta udává, jaká je struktura otevřených množin (není to však jednoznačně určené vyjádření otevřené množiny).

8.1. Věta (Struktura dvojrozměrných otevřených množin). *Každá neprázdná otevřená dvojrozměrná množina je sjednocení nekonečné spočetné množiny uzavřených čtverců, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami a které navzájem nemají žádné vnitřní body.*

Důkaz. Uvažujme dvě soustavy přímek

$$x = m, \quad y = n \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Tyto přímky rozdělují celou rovinu na spočetnou množinu čtverců se stranami rovnými jedné. Každému čtverci přiřadíme jeho hranici, takže dostaneme soustavu uzavřených čtverců s navzájem disjunktními vnitřky. Tyto čtverce nazveme čtverci 1. řádu. Čtverce 2. řádu dostaneme pomocí dvou soustav přímek tvaru

$$x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{n}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

čtverce 3. řádu dostaneme pomocí dvou soustav přímek tvaru

$$x = \frac{m}{4}, \quad y = \frac{n}{4} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

a obecně čtverce k-tého řádu $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dostaneme pomocí dvou soustav přímek tvaru

$$x = \frac{m}{2^{k-1}}, \quad y = \frac{n}{2^{k-1}} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Všechny takto sestrojené čtverce jsou uzavřené, jejich strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, dva čtverce jednoho a téhož řádu mají disjunktní vnitřky, každý čtverec řádu k má stranu délky 2^{1-k} a sestává ze čtyř čtverců řádu $k+1$ a konečně množina všech těchto čtverců je spočetná.

Uvažujme libovolnou neprázdnou dvojrozměrnou množinu G. Je-li M_0 libovolný bod této množiny, potom lze najít posloupnost do sebe vzájemně vložených uzavřených čtverců $\{Q^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, (kde $Q^{(j)}$ je čtverec j-tého řádu), které obsahují bod M_0,[1]

$$Q^{(1)} \supset Q^{(2)} \supset Q^{(3)} \supset \dots \tag{8.1}$$

Protože M_0 je vnitřním bodem množiny G a strana čtverce $Q^{(n)}$ s rostoucím n konverguje k nule, tak všechny čtverce $Q^{(n)}$, počínaje od některého z nich, jsou

[1] Tato konstrukce nemusí být jednoznačná: může se stát, že bod M_0 se vyskytne buď na společné straně dvou čtverců téhož řádu (potom vybereme jeden z těchto dvou čtverců), nebo je společným vrcholem čtyř čtverců téhož řádu (potom vybereme jeden z těchto čtyř čtverců).

obsaženy v G. Tedy *existují* uzavřené čtverce výše sestrojené sítě, které jsou obsaženy v G. Berouce toto v úvahu, označíme symbolem $\mathcal{T}_1$ množinu všech uzavřených čtverců 1. řádu, které jsou obsaženy v G, symbolem $\mathcal{T}_2$ množinu všech uzavřených čtverců 2. řádu, které jsou obsaženy v G, ale neleží ani v jednom čtverci systému $\mathcal{T}_1$, symbolem $\mathcal{T}_3$ množinu všech uzavřených čtverců 3. řádu, které jsou obsaženy v G, ale neleží ani v jednom čtverci systémů $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$, atd.

Každý ze systémů $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, ... je nanejvýš spočetný, takže i jejich sjednocení $\mathcal{T}$ je nanejvýš spočetné. Očíslujme všechny čtverce systému $\mathcal{T}$; nechť to jsou čtverce $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Dokážeme, že

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{8.2}$$

Z konstrukce systému $\mathcal{T}$ přímo plyne, že

$$G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{8.3}$$

Dokážeme nyní opačnou inkluzi: Nechť $M_0 \in G$ je libovolný, ale pevně zvolený bod. Z úvahy spojené s (8.1) plyne, že existují uzavřené čtverce původní sítě, které jsou obsaženy v G a obsahují bod M_0. Nechť $\mathcal{P}$ je množina řádů těchto čtverců. $\mathcal{P}$ je neprázdná množina přirozených čísel, takže v ní existuje nejmenší číslo. Nechť m je toto číslo. Potom existuje uzavřený čtverec Q_α řádu m, který obsahuje M_0 a je obsažen v G. Tento čtverec není obsažen v žádném uzavřeném čtverci původní sítě, který by obsahoval M_0, byl obsažen v G a měl řád menší než m, protože jinak by číslo m nebylo nejmenším číslem množiny $\mathcal{P}$. Tedy čtverec Q_α náleží do systému $\mathcal{T}_m$, takže

$$M_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Vzhledem k libovolnosti bodu m_0 jsme dokázali inkluzi

$$G \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{8.4}$$

Z inkluzí (8.3) a (8.4) plyne rovnost (8.2). Zbývá dokázat, že na pravé straně (8.2) je skutečně spočetně, a ne konečně mnoho čtverců Q_k. To je však snadné: Sjednocení konečného počtu uzavřených čtverců je uzavřená množina a na levé straně rovnosti (8.2) je otevřená množina G.

Jediná neprázdná množina v $\mathbb{R}^2$, která je současně otevřenou i uzavřenou, je celá rovina $\mathbb{R}^2$; ale kdyby $G = \mathbb{R}^2$, potom G nemůže být sjednocením konečného počtu uzavřených čtverců, takže tato poslední možnost se také vylučuje. □

Věta 8.1 bude mít zásadní význam pro vybudování teorie Lebesgueovy míry dvojrozměrných množin. Tato věta bude doplněna následující větou (která je samozřejmá vzhledem k tomu, že věty o komplementech množin uvedené v kap. 8 platí také v $\mathbb{R}^n$):

8.2. Věta. *Nechť $F \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná ohraničená uzavřená množina. Potom*

$$F = D - C_D F, \tag{8.5}$$

kde D je libovolný otevřený obdélník obsahující množinu F.

Poznamenejme, že pojem *uzavřené* množiny byl podrobně probrán v kap. 6. Výsledky uvedené ve Větách 8.1 a 8.2 se snadno zobecní z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$.

9. Úplné metrické prostory

Číselná přímka $\mathbb{R}^1$ je nejjednodušším příkladem tak zvaných úplných metrických prostorů, jejichž základní vlastnost probereme spolu s příklady v této kapitole.

9.1. Definice. Posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat *cauchyovskou* (nebo *fundamentální*), jestliže splňuje Cauchyovo kritérium, tj. jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné celé číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m,\, n \geq N(\varepsilon).$$

9.2. Tvrzení. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Skutečně, jestliže $\{x_n\}$ konverguje k x (tj. $\varrho(x_n, x) \to 0$), potom ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové celé kladné $N(\varepsilon)$, že $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$. Potom podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall m,\, n \geq N(\varepsilon). \quad \square$$

Naopak definujeme:

9.3. Definice. Jestliže v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ libovolná cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ konverguje (tj. existuje $x \in \mathcal{X}$ tak, že $\varrho(x_n, x) \to 0$, když $n \to \infty$), potom nazýváme tento prostor *úplný.*

9.4. Příklad. V prostoru izolovaných bodů uvedeném v příkladě 1.2 jsou cauchyovské pouze stacionární posloupnosti, tj. takové, v nichž se od určitého indexu stále opakuje tentýž bod. Každá taková posloupnost ovšem konverguje, tj. tento prostor je úplný.

9.5. Příklad. Úplnost prostoru $R^1 = (\mathbb{R}^1, \varrho(x,y) = |x-y|)$, tj. úplnost množiny všech reálných čísel, je známa z matematické analýzy.

9.6. Příklad. Úplnost euklidovského prostoru R_2^n, kde

$$R_2^n = \left(\mathbb{R}^n, \varrho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\right),$$

plyne snadno z úplnosti prostoru R^1: Nechť $\{x_n^{(p)}\}$ je cauchyovská posloupnost bodů

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}) \in R^n, \quad p = 1, 2, \ldots$$

To znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2 \tag{*}$$

pro všechna přirozená čísla p, q větší než $N(\varepsilon)$. Odtud dostáváme pro k-té souřadnice ($k = 1, 2, \dots, n$) tyto nerovnosti

$$|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon,$$

platné pro všechna přirozená čísla p, $q > N(\varepsilon)$, takže $\{x_k^{(p)}\}$ je cauchyovská posloupnost **reálných** čísel, tedy konvergentní. Položme

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^{(p)}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{**}$$

Nechť $p \to \infty$ v (*); potom podle (**) je $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$. Vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ odtud plyne $\lim\limits_{q\to\infty} \varrho(x^{(q)}, x) = 0$. Tím je úplnost prostoru R^n dokázána. □

9.7. Příklad. Úplnost prostorů R_1^n a R_∞^n, kde

$$R_1^n = \left(\mathbb{R}^n, \varrho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|\right), \quad R_\infty^n = \left(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty(x,y) = \max_{1\le k\le n}|x_k - y_k|\right),$$

lze ukázat obdobně.

9.8. Příklad. Dokážeme úplnost prostoru $C^0\langle a,b\rangle$, pro jehož metriku platí

$$\varrho_{C^0[a,b]}(f,g) = \max_{a\le t\le b}|f(t) - g(t)|. \tag{9.1}$$

Nechť $\{x_n(t)\}$ je nějaká cauchyovská posloupnost v prostoru $C^0\langle a,b\rangle$. Vzhledem k (9.1) to znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \tag{9.2}$$

pro všechna přirozená čísla m, $n > N(\varepsilon)$ a pro všechna čísla $t \in \langle a,b\rangle$.

Připomeňme si nyní **Cauchy-Bolzanovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí:** Aby posloupnost funkcí $\{x_n(t)\}$ měla limitní funkci, kterou označíme $x(t)$, a konvergovala k $x(t)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ **stejnoměrně**, je nutné a stačí aby ke každému $\varepsilon > 0$ existoval index $N(\varepsilon)$ (který nezávisí na $x \in \langle a,b\rangle$) tak, že nerovnost (9.2) platí pro všechna přirozená čísla m, $n > N(\varepsilon)$ a pro všechna čísla $t \in \langle a,b\rangle$.

Dále platí tato **věta A:** Nechť funkce $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ jsou definovány a spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pokud tyto funkce konvergují na $\langle a,b\rangle$ k funkci $x(t)$ **stejnoměrně**, potom i funkce $x(t)$ je na $\langle a,b\rangle$ spojitá.

Těchto dvou vět nyní využijeme: Podle CB-kritéria existuje na $\langle a,b\rangle$ funkce $x(t)$, ke které konverguje posloupnost funkcí $\{x_n(t)\}$ stejnoměrně, a podle věty A je tato funkce $x(t)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$. Tedy cauchyovská posloupnost $\{x_n(t)\}$ má v $C^0\langle a,b\rangle$ limitu, takže prostor $C^0\langle a,b\rangle$ je úplný.

9.9. Příklad. Dokážeme úplnost prostoru l_2, pro jehož metriku platí

$$\varrho(x,y) \equiv \varrho_{l_2}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2.$$

Nechť $\{x^{(n)}\} \subset l_2$ je cauchyovská posloupnost, kde

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots).$$

To znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\varrho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2 \quad \text{pro } n > N(\varepsilon),\ m > N(\varepsilon). \tag{9.3}$$

Ze vztahu (9.3) plyne, že pro každý index k platí

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2,$$

tj. pro každé přirozené číslo k je posloupnost reálných čísel $\{x_k^{(n)}\}$ cauchyovská, tedy konvergentní. Nechť

$$x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}.$$

Položme $x := (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$. Dokážeme, že platí vztahy (9.4) a (9.5) (čímž dokážeme úplnost prostoru l_2), kde

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty, \quad \text{tj. } x \in l_2, \tag{9.4}$$

přičemž

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = 0. \tag{9.5}$$

Z nerovnosti (9.3) plyne, že pro libovolné pevné přirozené číslo M je

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2.$$

V tomto součtu je konečný počet sčítanců a my můžeme, považujeme-li přirozené číslo n za pevné, přejít k limitě pro $m \to \infty$. Dostaneme

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k)^2 \le \varepsilon^2.$$

Tato nerovnost platí pro libovolné přirozené číslo M. Považujeme-li součty

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k)^2$$

za částečné součty, potom takto sestrojená řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2$$

je konvergentní a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2. \tag{9.6}$$

S pomocí nerovnosti $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, kde položíme $a = x_k^{(n)}$, $b = x_k - x_k^{(n)}$ (takže $a + b = x_k$), plyne z konvergence řad

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)})^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_k^{(n)})^2$$

konvergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$. Tím je dokázáno tvrzení (9.4).

Dále, protože číslo ε můžeme zvolit libovolně malé, nerovnost (9.6) znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0\,,$$

tj. $x^{(n)} \to x$ v metrice prostoru l_2. Tím je tvrzení (9.5) dokázáno.

9.10. Příklad. Dokážeme, že prostor $C_2^0\langle a, b\rangle$ není úplný. Mějme např. posloupnost spojitých funkcí na segmentu $\langle -1, 1\rangle$ (tj. pro jednoduchost $a = -1$, $b = 1$)

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{pro } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{pro } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{9.7}$$

Tato posloupnost je cauchyovská v prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$, protože

$$\int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)]^2 \,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\min(m, n)}\,;$$

nekonverguje však k žádné funkci prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$. Skutečně, nechť f je nějaká funkce z prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$ a ψ funkce definovaná vztahem

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } t < 0, \\ 1 & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

Z integrálního tvaru Minkowského nerovnosti (platné zřejmě i pro funkce po částech spojité) plyne

$$\left\{ \int_{-1}^{1} [f(t) - \psi(t)]^2 \,\mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_{-1}^{1} [f(t) - \varphi_n(t)]^2 \,\mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \psi(t)]^2 \,\mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Vzhledem k spojitosti funkce f je integrál na levé straně této nerovnosti kladný. Dále zřejmě je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \psi(t)]^2 \, dt = 0. \tag{9.9}$$

Proto integrál $\int_{-1}^{1}[f(t) - \varphi_n(t)]^2 \, dt$ nemůže konvergovat k nule pro $n \to \infty$.

Poznamenejme, že neúplnost prostoru $C_2^0\langle a, b\rangle$ plyne jednodušeji ze vztahu (9.9) a jednoznačnosti limity v $L_2(-1, 1)$.

9.11. Příklad. Metrický prostor M^∞ všech ohraničených posloupností je úplný. Toto tvrzení ať si dokáže čtenář za cvičení sám.

V případě, že metrický prostor je definován na lineárním prostoru a metrika je indukována normou, definujeme:

9.12. Definice. a) Úplný normovaný prostor se krátce nazývá *Banachův* prostor. b) Úplný unitární prostor se krátce nazývá *Hilbertův* prostor.

9.13. Poznámka (úplnost a uzavřenost). Někdy se (nesprávně) klade otázka, jaký je rozdíl mezi úplností a uzavřeností. **Úplnost** se týká **pouze** metrických prostorů a souvisí s cauchyovskými posloupnostmi; existují úplné i neúplné metrické prostory. **Uzavřenost** je pojem, který se týká každé množiny metrického prostoru (která je buď uzavřená nebo ne); přitom uzavřenost souvisí s konvergentními posloupnostmi. Každý metrický prostor je, jak již víme, uzavřený (v sobě).

9.14. Poznámka. Je zajímavé, že cauchyovskou posloupnost nelze definovat pomocí okolí (takže tento pojem je „netopologický").

Je třeba zdůraznit, že požadavek „$\forall m, n \geq N(\varepsilon)$" je silný, takže není vždy splněn. Na druhé straně dá v některých případech chvíli přemýšlení než dokážeme, že jej nelze splnit. Uvedeme v tomto směru dva příklady.

9.15. Příklad. Pro posloupnost $\{\varphi_n(t)\}$ funkcí (9.7) platí $\{\varphi_n(t)\} \subset C^0\langle -1, 1\rangle$. Dokažme, že tato posloupnost *není* cauchyovská v normě prostoru $C^0\langle -1, 1\rangle$.

Nechť přirozená čísla m, n splňují nerovnost $m < n$ a nechť jsou jinak libovolná. Potom výraz $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|$ nabývá svého maxima v bodech $t = -\frac{1}{n}$ a $t = \frac{1}{n}$, takže

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \varphi_n(\tfrac{1}{n}) - \varphi_m(\tfrac{1}{n}) = 1 - \tfrac{m}{n}.$$

Vidíme, že zvolíme-li $n = km$, kde $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = 1 - \tfrac{1}{k}.$$

Tedy zvolíme-li $\varepsilon < 1$, potom lze najít takové $k \in \mathbb{N}$, že $1 - \frac{1}{k} > \varepsilon$, takže při *každém* N všechny dvojice $\varphi_m(t)$, $\varphi_n(t)$, kde $m > N$ a $n = km$, nesplňují podmínku

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{\varphi_n(t)\}$ funkcí (9.7) není v normě prostoru $C^0\langle -1, 1\rangle$ cauchyovská.

Tento výsledek se dal očekávat, protože funkce (9.7) konvergují bodově (s výjimkou bodu $t = 0$) k nespojité funkci (9.8). Stejnoměrně tato posloupnost nekonverguje k žádné funkci.

9.16. Příklad. Mějme posloupnost $\{x_n(t)\}$ funkcí $x_n(t) = t^n$ spojitých pro všechna $t \in \mathbb{R}^1$. Dokažme, že tato posloupnost *není* cauchyovská v normě prostoru $C^0\big\langle 0,1\big\rangle$.

Předpokládejme, že $m < n$. Potom můžeme zvolit $n = 2m$, takže

$$\max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x_m(t)| = \max_{0\le t\le 1} |t^{2m} - t^m|.$$

Zaveďme substituci $s = t^m$ a hledejme maximum funkce $|s^2 - s|$ a bod s_0, ve kterém toto maximum nastává. Platí $(s^2 - s)' = 2s - 1$, takže $s_0 = \frac{1}{2}$. Odtud

$$(t_0)^m = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \tfrac{1}{\sqrt[m]{2}}.$$

Tedy pro *libovolné* m platí

$$\max_{0\le t\le 1} |t^{2m} - t^m| = |(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{4}.$$

Vidíme, že pro $\varepsilon < \frac{1}{4}$ nelze najít $N(\varepsilon)$ tak, aby

$$\max_{0\le t\le 1} |t^n - t^m| < \varepsilon \quad \forall m, n > N(\varepsilon),$$

takže posloupnost $\{t^n\}$ není v normě prostoru $C^0\big\langle 0,1\big\rangle$ cauchyovská.

Tento výsledek se dal očekávat, protože funkce $x_n(t) = t^n$ konvergují na intervalu $\langle 0,1\rangle$ bodově k nespojité funkci

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0,1), \\ 1 & \text{pro } t = 1. \end{cases}$$

Stejnoměrně tato posloupnost nekonverguje na intervalu $\langle 0,1\rangle$ k žádné funkci.

Je třeba poznamenat, pro libovolné $\delta > 0$ posloupnost funkcí $x_n(t) = t^n$ stejnoměrně konverguje k nule na intervalu $\big\langle 0, 1-\delta\big\rangle$.

10. Zúplnění metrického prostoru

Každý metrický prostor, je-li neúplný, se dá doplnit na úplný metrický prostor. Tomuto procesu se říká *zúplnění*. Před vyslovením příslušné definice a věty zavedeme ještě pojem *podprostoru metrického prostoru*.

10.1. Definice. Nechť $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ je libovolný metrický prostor. Metrický prostor $\mathcal{M} = (M, \varrho)$ s toutéž metrikou ϱ uvažovanou pouze na množině $M \subset X$ se nazývá *podprostorem* metrického prostoru $\mathcal{X}$.

10.2. Definice. Nechť $\mathcal{X}$ je libovolný metrický prostor. Úplný metrický prostor $\mathcal{X}^*$ se nazývá *zúplněním*[2] prostoru $\mathcal{X}$, jestliže:

1) $\mathcal{X}$ je podprostorem prostoru $\mathcal{X}^*$;[3]

2) prostor $\mathcal{X}$ je hustý v prostoru $\mathcal{X}^*$.[4]

Například prostor všech reálných čísel je zúplněním (úplným obalem) prostoru všech racionálních čísel.

---

[2]Tento výraz je překladem ruského výrazu "popolněnije"; někdy se též užívá termín *úplný obal.*

[3]To znamená: Je-li $x \in \mathcal{X}$, potom je $x \in \mathcal{X}^*$; je-li ϱ metrika prostoru $\mathcal{X}$ a ϱ_1 metrika prostoru $\mathcal{X}^*$, potom pro body x, $y \in \mathcal{X}$ platí $\varrho(x,y) = \varrho_1(x,y)$.

[4]To znamená, že $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^*$, kde $\overline{\mathcal{X}}$ je uzávěr prostoru $\mathcal{X}$ v prostoru $\mathcal{X}^*$. (Množina B je hustá v množině A, je-li $\overline{B} \supset A$.)

10.3. Definice. Říkáme, že vzájemně jednoznačné zobrazení $y = f(x)$ metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ na metrický prostor $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ je *izometrické*, jestliže

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho^*(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Samotné metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, mezi kterými je možno stanovit izometrické zobrazení, se nazývají *izometrickými* mezi sebou.

Izometrie dvou prostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ značí, že metrické vztahy mezi jejich elementy jsou jedny a tytéž a rozdíl může být pouze v kvalitě jejich elementů, což je z metrického hlediska nepodstatné. V dalším proto budeme považovat izometrické prostory za totožné.

10.4. Věta. *Každý metrický prostor $\mathcal{X}$ má zúplnění a všechna jeho zúplnění jsou izometrická.*[5]

Důkaz je dlouhý a komplikovaný; odkazujeme na [Že1], str. 132 – 134.

11. Podprostory normovaných prostorů

V Definici 10.1 jsme zavedli pojem podprostoru metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$. Této definici vyhovuje každý metrický prostor (M, ϱ), kde $M \subset X$.

Definice podprostoru normovaného prostoru bude komplikovanější, protože množina prvků normovaného prostoru tvoří lineární prostor a je přirozené požadovat, aby podmnožina tohoto lineárního prostoru byla v případě podprostoru opět lineárním prostorem. Navíc v případě lineárních či normovaných prostorů a jejich [podprostorů hovoříme o dimenzi. S tímto pojmem začneme výklad této kapitoly.

11.1. Lineární závislost. Prvky $x, y, \dots, w$ lineárního prostoru se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existují takové konstanty $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, že[6]

$$\alpha x + \beta y + \cdots + \lambda w = \theta. \tag{11.1}$$

V opačném případě se tyto prvky nazývají *lineárně nezávislé*. Jinak řečeno, prvky $x, y, \dots, w$ jsou lineárně nezávislé, jestliže z rovnosti (11.1) plyne, že

$$\alpha = \beta = \cdots = \lambda.$$

Nekonečný systém prvků $x, y, \dots$ prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá *lineárně nezávislý*, jestliže prvky každé konečné podmnožiny množiny $\{x, y, \dots\}$ jsou lineárně nezávislé.

Jestliže v prostoru $\mathcal{L}$ lze najít n lineárně nezávislých prvků, ale libovolné $n+1$ prvky jsou již lineárně závislé, říkáme, že prostor $\mathcal{L}$ má *dimenzi* (*rozměr*) n. Jestliže v prostoru $\mathcal{L}$ lze nalézt nekonečný systém lineárně nezávislých prvků, říkáme, že *prostor $\mathcal{L}$ má nekonečnou dimenzi. Bází v n-rozměrném prostoru $\mathcal{L}$* nazýváme libovolný systém n lineárně nezávislých prvků. Prostory R^n v reálném případě a C^n v komplexním případě mají, jak lze snadno ověřit, dimenzi n.

[5] Nebo trochu obšírněji: Každý metrický prostor $\mathcal{X}$ má zúplnění, přičemž toto zúplnění je určeno jednoznačně až na taková izometrická zobrazení, která zobrazují každý bod $x \in \mathcal{X}$ na tento bod $x \in \mathcal{X}$.

[6] Výraz $\alpha x + \beta y + \cdots + \lambda w$ nazýváme lineární kombinací prvků $x, y, \dots, w$.

V lineární algebře se vyšetřují lineární prostory konečné dimenze. Zde se však naopak budeme především zabývat prostory nekonečné dimenze, které mají zásadní význam z hlediska matematické analýzy. Ponecháváme čtenáři, aby se ověřil, že každý z prostorů uvedených v příkladech 3.8 až 3.12 má nekonečnou dimenzi (jedná se zde o prostory $C^0\langle a,b\rangle$, $C_0^0\langle a,b\rangle$, l_2, c, c_0 a M^∞).

11.2. Podprostory lineárního prostoru. Neprázdná podmnožina $\mathcal{L}^*$ lineárního prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá *podprostor* prostoru $\mathcal{L}$, jestliže sama tvoří lineární prostor vzhledem k operacím sčítání prvků a násobení prvku skalárem, které jsou definovány v prostoru $\mathcal{L}$.

Jinak řečeno, $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ je podprostor, jestliže

$$x, y \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathcal{L}^*$$

pro libovolná čísla α, β.

V každém lineárním prostoru $\mathcal{L}$ existuje podprostor, který se skládá pouze z nulového prvku θ a nazývá se *nulový podprostor*. Také celý prostor $\mathcal{L}$ lze považovat za podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Podprostor různý od prostoru $\mathcal{L}$ a obsahující aspoň jeden nenulový prvek se nazývá *vlastní podprostor*.

11.3. Příklady. a) Nechť $\mathcal{L}$ je libovolný lineární prostor a x jeho nenulový prvek. Množina prvků $\{\lambda x\}$, kde λ probíhá všechna čísla (reálná, popř. komplexní), tvoří podprostor o dimenzi 1. Tento podprostor je vlastní, jestliže dimenze prostoru $\mathcal{L}$ je větší než 1.

b) Mějme prostor $C^0\langle a,b\rangle$ a v něm množinu $P\langle a,b\rangle$ všech polynomů jedné proměnné. Zřejmě $P\langle a,b\rangle$ tvoří vlastní podprostor prostoru $C^0\langle a,b\rangle$, a to nekonečné dimenze. Množina $P_{k-1}\langle a,b\rangle$ všech polynomů stupně nanejvýš $k-1$ tvoří k-dimenzionální podprostor prostoru $C^0\langle a,b\rangle$.

c) Uvažujme prostory l_2, c_0, c a M^∞. Každý z těchto prostorů uvažovaný pouze jako lineární prostor je vlastním podprostorem prostoru následujícího.

11.4. Definice. Nechť $\{x_\alpha\}$ je libovolná neprázdná množina prvků lineárního prostoru $\mathcal{L}$. Potom v prostoru $\mathcal{L}$ existuje nejmenší podprostor (který může splývat s prostorem $\mathcal{L}$) obsahující množinu $\{x_\alpha\}$. Dále, *průnik libovolného systému $\{\mathcal{L}_\gamma\}$ podprostorů je opět podprostor.*[7] Průnik všech podprostorů obsahujících množinu $\{x_\alpha\}$ nazveme *podprostorem vytvořeným (generovaným) množinou $\{x_\alpha\}$* nebo *lineárním obalem množiny $\{x_\alpha\}$*. Tento podprostor budeme označovat $L\{x_\alpha\}$. Je to minimální podprostor obsahující množinu $\{x_\alpha\}$.

11.5. Podprostory normovaného prostoru. V normovaném prostoru nás nejvíce zajímají *uzavřené lineární podprostory*, tj. podprostory obsahující všechny svoje hromadné body. V normovaném prostoru, který má konečnou dimenzi, je každý podprostor automaticky uzavřený. V případě prostoru o nekonečné dimenzi tomu tak není. Například v prostoru $C^0\langle a,b\rangle$ všech spojitých funkcí s normou (3.11) tvoří množina $P\langle a,b\rangle$ všech polynomů podprostor, který není uzavřený.[8]

---

[7] Opravdu, jestliže $\mathcal{L}^* = \bigcap\limits_\gamma \mathcal{L}_\gamma$ a $x, y \in \mathcal{L}^*$, potom také $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}^*$ pro všechna čísla α, β.

[8] Podle Weierstrassovy věty (viz např. [Ja1]), která říká, že každá spojitá funkce na segmentu je limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti polynomů, je uzávěr podprostoru $P\langle a,b\rangle$ roven celému prostoru $C^0\langle a,b\rangle$.

Jiný příklad: Všechny posloupnosti, které obsahují jen konečný počet členů různých od nuly, tvoří podprostor prostoru M^∞. Avšak tento podprostor není uzavřený vzhledem k normě (3.20); do jeho uzávěru patří např. posloupnost $(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.

Protože v dalším výkladu se budeme zabývat jenom uzavřenými podprostory, je vhodné poněkud změnit terminologii, kterou jsme zavedli v položce 11.2. *Podprostorem normovaného prostoru* budeme nazývat nyní jenom uzavřený podprostor; speciálně *podprostorem vytvořeným daným systémem prvků* $\{x_\alpha\}$ budeme nazývat nejmenší *uzavřený* podprostor obsahující $\{x_\alpha\}$. Takový podprostor budeme nazývat *lineárním uzávěrem systému* $\{x_\alpha\}$. Množinu prvků (nikoliv nutně uzavřenou), která obsahuje zároveň s prvky x a y také jejich libovolnou lineární kombinaci $\alpha x + \beta y$, budeme nazývat *lineární varietou.*

Systém prvků ležící v normovaném prostoru E budeme nazývat *úplným v prostoru* E, jestliže podprostor jím vytvořený je celý prostor E. Například podle Weierstrassovy věty je systém funkcí $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ úplný v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$.

12. Spojitá zobrazení. Homeomorfizmus

12.1. Definice. Nechť $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ a $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ jsou dva metrické prostory. Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{Y}$ se nazývá *spojité v bodě* $x_0 \in X$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $\delta > 0$, že

$$\varrho^*(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

pro všechny body x takové, že

$$\varrho(x, x_0) < \delta.$$

Jinými slovy, zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité v bodě x_0, jestliže k libovolnému okolí $O_\varepsilon(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ lze najít takové okolí $O_\delta(x_0)$ bodu x_0, že jeho obraz $f(O_\delta(x_0))$ leží uvnitř $O_\varepsilon(f(x_0))$:

$$f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0)). \tag{12.1}$$

Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nazývá *spojité*, jestliže je spojité ve všech bodech prostoru $\mathcal{X}$. $\square$

12.1a. Poznámka. Je-li $\mathcal{Y}$ číselná přímka, potom spojité zobrazení $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$ se nazývá *spojitou funkcí* na $\mathcal{X}$.

Stejně jako v případě zobrazení libovolných množin budeme říkat, že $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je zobrazení $\mathcal{X}$ **na** $\mathcal{Y}$, jestliže každý bod $y \in \mathcal{Y}$ má alespoň jeden vzor.

V analýze spolu s definicí spojitosti funkcí „v termínech okolí“ (čili „v $\varepsilon - \delta$ jazyku“) se užívá ekvivalentní definice spojitosti „v jazyku posloupností“. Analogická situace nastává i v případě spojitých zobrazení libovolných metrických prostorů:

12.2. Věta. *Aby zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bylo spojité v bodě x, je nutné a stačí, aby v případě, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje v $\mathcal{X}$ k bodu x, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konvergovala v $\mathcal{Y}$ k bodu $y = f(x)$.*

Důkaz. Jsou dva výroky: (A): $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité v bodě x, (B): $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Máme dokázat: $(A) \Leftrightarrow (B)$.

a) Dokážeme nejprve dostatečnost této podmínky, tj. dokážeme implikaci $(B) \Rightarrow (A)$. Jestliže zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ není spojité v bodě x, potom existuje takové okolí $O_\varepsilon(y)$ bodu $y = f(x)$, že v libovolném okolí $O_\delta(x)$ se naleznou body, jejichž obrazy neleží v $O_\varepsilon(y)$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ a vyberme v každé kouli $O_{1/n}(x)$ bod x_n tak, že $f(x_n) \notin O_\varepsilon(y)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x (symbolickým zápisem: $x_n \to x$), ale posloupnost $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k $f(x)$, tj. podmínka věty není splněna, takže jsme dokázali: non $(A) \Rightarrow$ non (B). Negací této implikace dostáváme $(B) \Rightarrow (A)$, což jsme chtěli dokázat. (Všimněme si, že jsme v důkazu užili axiom výběru.)

b) Nyní dokážeme nutnost této podmínky, tj. implikaci $(A) \Rightarrow (B)$. To znamená, že předpokládáme, že

$$x_n \to x. \tag{12.2}$$

a současně, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že platí (12.1). Podle (12.2) k $\delta(\varepsilon) > 0$ existuje $N(\delta(\varepsilon))$ tak, že pro $n \geq N(\delta(\varepsilon))$ je

$$x_n \in O_{\delta(\varepsilon)}(x).$$

Tedy

$$f(x_n) \in f(O_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset O_\varepsilon(f(x)). \tag{12.3}$$

Inkluze $\subset$ v (12.3) platí podle (12.1). Ze vztahu (12.3) plyne, že $f(x_n) \to f(x)$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

12.2a. Poznámka. Konverguje-li posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{X}$ k bodu x, znamená to, že $\varrho(x_n, x) \to 0$, a píšeme to také ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{v metrickém prostoru } \mathcal{X}. \tag{12.5}$$

Podobně zápis $\varrho^*(f(x_n), f(x)) \to 0$, který znamená, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje v $\mathcal{Y}$ k bodu $f(x)$, píšeme také ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{v metrickém prostoru } \mathcal{Y}. \tag{12.6}$$

Dosadíme-li do (12.6) za x z (12.5), dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{12.7}$$

Vztah (12.7) říká: Je-li zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ spojité, potom lze zaměnit znak limitního přechodu a znak zobrazení f.

Pro spojitá zobrazení platí následující věta, která je analogií dobře známé věty z analýzy o spojitosti složené funkce.

12.3. Věta. *Nechť $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ jsou metrické prostory a $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ spojitá zobrazení. Potom zobrazení $z = \varphi(f(x))$ metrického prostoru $\mathcal{X}$ do metrického prostoru $\mathcal{Z}$ je spojité.*

12.4. Definice. a) Zobrazení f se nazývá *homeomorfizmus*, je-li vzájemně jednoznačné[9] a vzájemně spojité (tj. jak zobrazení f, tak k němu inverzní zobrazení f^{-1} jsou spojitá).

b) Metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ se nazývají *homeomorfní*, existuje-li mezi nimi homeomorfní zobrazení.

[9]Nechť A a B jsou dvě množiny. Pravidlo φ, které každému prvku a množiny A přiřazuje jeden a pouze jeden prvek b množiny B, přičemž každý prvek $b \in B$ je přiřazený jednomu a pouze jednomu $a \in A$, se nazývá *vzájemně jednoznačné přiřazení* mezi množinami A a B.

12.5. Příklad. a) Ukažme, že intervaly $X = \langle 0, 1 \rangle \subset \mathbb{R}^1$ a $Y = \langle A, B \rangle \subset \mathbb{R}^1$ jsou homeomorfní: Lineární (a tedy spojitá) funkce

$$y = f(x) = (B - A)x + A$$

zobrazuje X na Y ($Y = f(X)$) a k ní inverzní funkce

$$x = f^{-1}(y) = \tfrac{1}{b-A}(y - A)$$

je také lineární (a tedy spojitá) a zobrazuje Y na X ($Y = f(X)$).

b) Ukažme, že interval $X = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$ je homeomorfní s celou číselnou přímkou $Y = \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$: Funkce

$$y = f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (-1, 1)$$

je spojitá a má obor hodnot $Y = (-\infty, \infty)$. K ní inverzní funkce

$$x = f^{-1}(y) = \tfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} y, \quad y \in (-\infty, \infty)$$

je také spojitá a má obor hodnot $X = (-1, 1)$.

12.6. Příklad. Ukážeme, že izometrické zobrazení (viz Definici 10.3) je speciálním případem homeomorfizmu: Z uvedené definice plyne

$$\varrho(x_n, x) = \varrho^*(f(x_n), f(x)) \quad \forall x_n, x \in X, \tag{12.8}$$

$$\varrho(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y)) = \varrho^*(y_n, y) \quad \forall y_n, y \in Y, \tag{12.9}$$

Pokud $x_n \to x$, tak podle (12.8) $f(x_n) \to f(x)$; pokud $y_n \to y$, tak podle (12.9) $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. Tedy podle Věty 12.2 jsou obě zobrazení spojitá.

Samotné metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, mezi kterými je možno stanovit izometrické zobrazení, se nazývají *izometrickými* mezi sebou.

Izometrie dvou prostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ značí, že metrické vztahy mezi jejich elementy jsou jedny a tytéž a rozdíl může být pouze v kvalitě jejich elementů, což je z metrického hlediska nepodstatné. Izometrické prostory se proto považují za totožné (v teorii metrických prostorů).

12.7. Příklad. a) Uvažujme normovaný prostor $R^1 = (\mathbb{R}^1, \|x\| = |x|)$ a v něm dva intervaly $S_1 = \langle a, b \rangle$, $S_2 = \langle a + c, b + c \rangle$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ jsou pevná čísla. Vzájemně jednoznačné a vzájemně spojité zobrazení $f : S_1 \to S_2$ je tvaru $f(x) = x + c$, kde $x \in S_1$. Intervaly $S_1 = \langle a, b \rangle$, $S_2 = \langle a + c, b + c \rangle$ jsou z metrického hlediska nerozlišitelné.

b) Příklad z části a) lze zobecnit takto: Uvažujme normovaný prostor R^n_p a v něm libovolnou množinu M_1. Definujme $M_2 = f(x) = x + x_0$, kde $x \in M_1$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je libovolný pevný bod. Množiny M_1, M_2 jsou izometrické; tzn. z metrického hlediska nerozlišitelné.

13. Banachův princip pevného bodu (BPPB)

Řadu problémů souvisejících s existencí a jednoznačností řešení rovnic různého typu lze převést na otázku existence a jednoznačnosti pevného bodu nějakého zobrazení odpovídajícího metrického prostoru do tohoto prostoru. Mezi různými kritérii existence a jednoznačnosti pevného bodu zobrazení tohoto druhu můžeme za jedno z nejjednodušších a zároveň nejdůležitějších kritérií považovat tzv. *Banachův princip pevného bodu* (stručně BPPB); někdy též nazývaný *princip kontraktivních zobrazení.*

13.1. Definice. Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor. Zobrazení A prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *kontraktivní* (nebo *kontrakce*), existuje-li takové číslo $0 < \alpha < 1$, že pro libovolné dva body x, $y \in \mathcal{X}$ platí nerovnost

$$\varrho(Ax, Ay) \leq \alpha\varrho(x, y). \tag{13.1}$$

13.2. Poznámka. Místo $A(x)$, $A(A(x)), \ldots$ zde po řadě píšeme $Ax, A^2x, \ldots$

13.3. Věta. *Každé kontraktivní zobrazení je spojité.*

Důkaz. Jestliže $x_n \to x$, potom podle (13.1) také platí $Ax_n \to Ax$. Tvrzení Věty 13.3 nyní plyne z Věty 12.2. $\square$

13.4. Definice. Bod x se nazývá *pevný bod zobrazení* A, jestliže $Ax = x$. Jinak řečeno, pevné body jsou řešení rovnice $Ax = x$.

13.5. Věta (BPPB). *Každé kontraktivní zobrazení definované v úplném metrickém prostoru $\mathcal{X}$ má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in \mathcal{X}$ je libovolný bod. Položme $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, atd.; obecně nechť $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$.

1. Ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská: předpokládáme-li pro určitost, že $m \geq n$, dostaneme podle (13.1)

$$\varrho(x_n, x_m) = \varrho(A^nx_0, A^mx_0) \leq \alpha^n\varrho(x_0, A^{m-n}x_0) = \alpha^n\varrho(x_0, x_{m-n}) \leq$$
$$\leq \alpha^n[\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_2) + \cdots + \varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \leq$$
$$\leq \alpha^n\varrho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) = \alpha^n\varrho(x_0, x_1)\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \leq \alpha^n\varrho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Protože $\alpha < 1$, je pro dostatečně velká přirozená čísla n tento výraz libovolně malý. Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.

2. Vzhledem k úplnosti prostoru $\mathcal{X}$ posloupnost $\{x_n\}$, která je cauchyovská, má v tomto prostoru limitu. Položme

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{v } \mathcal{X}, \text{tj. } \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0.$$

Potom vzhledem k Větám 13.3 a 12.2 platí

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,.$$

Existence pevného bodu je tedy dokázána. Dokážeme ještě jeho *jednoznačnost*: jestliže

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

potom z nerovnosti (13.1) plyne nerovnost

$$\varrho(x, y) \leq \alpha\varrho(x, y),$$

odkud vzhledem k tomu, že $\alpha < 1$, plyne $\varrho(x, y) = 0$, tj. $x = y$. $\square$

14. Některé aplikace BPPB

BPPB lze použít k důkazu vět o existenci a jednoznačnosti řešení pro rovnice různých typů. Kromě důkazu existence a jednoznačnosti řešení rovnice $Ax = x$ dává BPPB také praktickou metodu přibližného výpočtu tohoto řešení (nazývanou *metoda postupných aproximací*).

14A. Nejjednodušší aplikace BPPB

14.1. Příklad. Nechť funkce f, která je definována na segmentu $\langle a, b\rangle$, splňuje na tomto segmentu Lipschitzovu podmínku

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|$$

s konstantou $K < 1$ a zobrazuje segment $\langle a, b\rangle$ do segmentu $\langle a, b\rangle$. Potom f je kontraktivní zobrazení a podle věty 13.5 posloupnost

$$x_0,\, x_1 = f(x_0),\, x_2 = f(x_1), \dots,\, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

konverguje k jedinému kořenu rovnice $x = f(x)$.

14.2. Příklad. Nechť A je zobrazení n-rozměrného prostoru do tohoto prostoru definované soustavou lineárních rovnic

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Je-li A kontraktivní zobrazení, můžeme k řešení rovnice $x = Ax$ použít metodu postupných aproximací.

Za jakých podmínek bude zobrazení A kontraktivní? Odpověď na tuto otázku závisí na volbě metriky v prostoru. Uvedeme tři varianty:

a) V prostoru R_0^n, kde

$$\varrho(x, y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|\,,$$

platí

$$\varrho(y', y'') = \max_{1\le i\le n} |y_i' - y_i''| = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j' - x_j''| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\le j\le n} |x_j' - x_j''| = \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \varrho(x', x'')\,.$$

Odtud plyne tato podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le \alpha < 1 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{14.1}$$

b) V prostoru R_1^n, kde

$$\varrho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

platí

$$\varrho(y',y'')=\sum_{i=1}^{n}|y'_i-y''_i|=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x'_j-x''_j)\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot|x'_j-x''_j|\le\left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\varrho(x',x'')\,.$$

Odtud plyne podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\le\alpha<1\quad(j=1,\ldots,n).\tag{14.2}$$

c) V prostoru R^n, kde

$$\varrho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\,,$$

platí na základě Cauchy-Buňakovského nerovnosti

$$\varrho^2(y',y'')=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x'_j-x''_j)\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)\varrho^2(x',x'')\,.$$

Odtud plyne tato podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\le\alpha<1\,.\tag{14.3}$$

Je-li tedy splněna alespoň jedna z podmínek (14.1) – (14.3),[10] existuje právě jeden takový bod $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, že

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i\,,$$

[10]Z kterékoli z podmínek (14.1) – (14.3) speciálně plyne, že

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1\end{vmatrix}\ne 0\,.$$

přičemž postupné aproximace konvergující k tomuto řešení mají tvar

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}),$$

kde

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

a za $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ lze vzít libovolný bod prostoru R^n.

Každá z podmínek (14.1) – (14.3) *stačí* k tomu, aby zobrazení $y = Ax$ bylo kontraktivní. Pokud jde o podmínku (14.1), lze dokázat, že je také nutnou podmínkou pro kontraktivnost zobrazení $y = Ax$ z prostoru R_0^n do prostoru R_0^n.

14B. Věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic

Pro analýzu jsou důležité aplikace BPPB v jiných prostorech než n-rozměrných. S jeho pomocí lze snadno dokázat věty o existenci a jednoznačnosti pro některé typy diferenciálních rovnic a integrálních rovnic.

a) Počáteční (Cauchyova) úloha pro diferenciální rovnici y'=f(x,y)

14.3. Věta (Picard). *Mějme diferenciální rovnici*

$$y' = f(x, y) \tag{14.4}$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0, \tag{14.5}$$

přičemž funkce f je definovaná a spojitá v nějaké rovinné oblasti G,[11] *která obsahuje bod $[x_0, y_0]$ a splňuje v této oblasti Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\,.$$

Potom v nějakém intervalu $|x - x_0| \leq d$ existuje právě jedno řešení $y = \varphi(x)$ rovnice (14.4)*, které splňuje počáteční podmínku* (14.5)*.*

Důkaz. Rovnice (14.4) se v tomto důkazu přepíše na tvar

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{14.6}$$

zintegruje se v intervalu $\langle x_0, x \rangle$ a užije se počáteční podmínka (14.5) napsaná pro funkci φ, tj. $\varphi(x_0) = y_0$. Dostaneme integrální rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t. \tag{14.7}$$

[11] *Oblast v metrickém prostoru $\mathcal{X}$* znamená otevřenou souvislou množinu v tomto prostoru. *Rovinnou oblastí* rozumíme oblast v prostoru R^2.

Užijeme-li větu o derivaci integrálu jako funkce horní meze, dostaneme z (14.7) rovnici (14.6); položíme-li v (14.7) $x = x_0$, dostaneme $\varphi(x_0) = y_0$. Tedy integrální rovnice (14.7) je ekvivalentní s počátečním problémem (14.4), (14.5).

Nechť G^* je taková ohraničená oblast obsahující bod $[x_0, y_0]$, že $\overline{G^*} \subset G$. Vzhledem k spojitosti funkce f existuje taková konstanta K, že platí $|f(x,y)| \leq K$ pro všechny body $[x,y] \in G^*$. Zvolme nyní takové číslo $d > 0$, aby platily tyto podmínky:

1. Jestliže $|x - x_0| \leq d$, $|y - y_0| \leq Kd$, potom $[x,y] \in G^*$.
2. $Ld < 1$.

Označme symbolem C^* metrický prostor spojitých funkcí $\psi(x)$ definovaných v intervalu $|x - x_0| \leq d$ (tj. intervalu $\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ a takových, že $|\psi(x) - y_0| \leq Kd$, s metrikou

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) = \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|\,.$$

Platí $C^* \subset C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$. Nechť posloupnost $\{\psi_n\} \subset C^*$ je konvergentní v $C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$, tj. existuje funkce $\psi \in C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ tak, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $N(\varepsilon)$, že

$$\max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_n(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Protože $\{\psi_n\} \subset C^*$, pro každou funkci ψ_n platí, že

$$|\psi_n(x) - d| \leq Kd \quad \forall x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle.$$

Tedy

$$\max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi(x) - d| \leq \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_n(x) - \psi(x)| + \\ + \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_n(x) - d| < \varepsilon + Kd\,.$$

Vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ odtud plyne

$$\max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi(x) - d| \leq Kd\,,$$

což znamená, že $\psi(x) \in C^*$. Protože prostor $C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ je úplný, získaný výsledek znamená, že C^* je úplný metrický prostor.[12]

Nechť $\psi = A\varphi$ je zobrazení definované vztahem

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

[12]Nechť $\mathcal{X}$ je libovolný metrický prostor. Říkáme, že množina $M \subset \mathcal{X}$ je *uzavřená*, jestliže limita x každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$, která je konvergentní v $\mathcal{X}$, náleží do M, tj. $x \in M$. Z této definice plyne, že každý metrický prostor je uzavřený a že každá uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru tvoří úplný metrický prostor. (To jsme také dokázali v případě prostoru C^*: ukázali jsme, že C^* je uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru $C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$, takže C^* je úplný metrický prostor.)

kde $|x-x_0| \le d$. Dokážeme, že toto zobrazení převádí úplný prostor C^* do prostoru C^* a je v něm kontraktivní: Nechť $\varphi \in C^*$, $|x-x_0| \le d$. Potom

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \right| \le Kd,$$

a tedy $\psi = A\varphi \in C^*$. Kromě toho je

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le Ld \max_{x \in \left\langle x_0 - d, x_0 + d \right\rangle} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = Ld\varrho(\varphi_1, \varphi_2)\,,$$

a tedy platí

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) = \max_{x \in \left\langle x_0 - d, x_0 + d \right\rangle} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le Ld\varrho(\varphi_1, \varphi_2)\,.$$

Protože $Ld < 1$, plyne odtud, že zobrazení A je kontraktivní.

Tedy jsou splněny obě podmínky BPPB. Podle tohoto principu má rovnice $\varphi = A\varphi$, tj. rovnice (14.7), právě jedno řešení v prostoru C^*. $\square$

Porovnejte zde uvedený důkaz Picardovy věty s důkazem provedeným v [ČŽ] a všimněte si, o co kratší a pružnější je důkaz užívající BPPB.

Stejně jako v [ČŽ] postupné aproximace $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ konvergující k přesnému řešení počátečního problému (14.4), (14.5) mají tvar

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, \dots),$$

kde např. $\varphi_0 = y_0$.

b) Cauchyova úloha pro soustavu diferenciálních rovnic

Podobně jako v části se dokáže věta o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{14.8}$$

s počátečními podmínkami

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n), \tag{14.9}$$

přičemž funkce f_i jsou definované a spojité v nějaké oblasti G prostoru R^{n+1}, obsahující bod $[x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}]$, a splňují v této oblasti Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným $y_1, \dots, y_n$:

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})| \le L \max_{1 \le j \le n} |y_j^{(1)} - y_j^{(2)}|\,.$$

Dokazuje se (viz [Že1, str. 140 – 141], že za těchto podmínek existuje v nějakém intervalu $|x - x_0| \leq d$ právě jedno řešení počátečního problému (14.8), (14.9), tj. právě jeden systém funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, který splňuje rovnice (14.8) a počáteční podmínky (14.9).

Postupné aproximace $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{mi}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ konvergující k přesnému řešení počátečního problému (14.8), (14.9) mají tvar

$$\varphi_{mi} = \varphi_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_{m-1,1}(t), \ldots, \varphi_{m-1,n}(t))\,\mathrm{d}t \quad (i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots),$$

kde např. $\varphi_{0j} = y_{0j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

14C. Použití BPPB pro integrální rovnice

a) Fredholmova rovnice. Použijeme nyní BPPB k důkazu existence a jednoznačnosti řešení *Fredholmovy lineární integrální rovnice druhého druhu*, tj. rovnice

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.11}$$

kde K (tzv. *jádro*) a φ jsou dané funkce, f je hledaná funkce a λ je libovolný reálný parametr. Uvidíme, že BPPB lze použít při dostatečně malých hodnotách parametru λ.

Předpokládejme, že K je spojitá funkce ve čtverci $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$, a tedy ohraničená, tj.

$$|K(x, y)| \leq M \quad \forall [x, y] \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle,$$

a že φ je spojitá funkce na segmentu $\langle a, b\rangle$. Nechť $g = Af$ je zobrazení úplného prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ do prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ definované vztahem

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,.$$

Platí

$$\varrho(g_1, g_2) = \max_{x \in \langle a, b\rangle} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M (b - a) \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Pro $|\lambda| < [M(b - a)]^{-1}$ je tedy zobrazení A kontraktivní.

Na základě BPPB docházíme k závěru, že pro každou hodnotu parametru λ, pro kterou platí $|\lambda| < [M(b - a)]^{-1}$, má Fredholmova rovnice (14.11) právě jedno řešení, které je spojité. Postupné aproximace $f_0, f_1, f_2, \ldots$ konvergující k tomuto řešení mají tvar

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,,$$

kde za $f_0(x)$ lze vzít libovolnou spojitou funkci.

b) Nelineární integrální rovnice. BPPB lze také použít pro *nelineární integrální rovnici* tvaru

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.12}$$

kde funkce φ je spojitá na segmentu $\langle a, b\rangle$, jádro K v množině $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle \times (-\infty, +\infty)$ a kromě toho splňuje v této množině Lipschitzovu podmínku vzhledem k svému „funkcionálnímu“ argumentu:

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

V tomto případě pro zobrazení $g = Af$ úplného prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ do prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, které je definováno vztahem

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.13}$$

platí nerovnost

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda|L(b-a) \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

kde $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Pro $|\lambda| < [L(b-a)]^{-1}$ je tedy zobrazení A kontraktivní.

c) Volterrova integrální rovnice. Mějme konečně *integrální rovnici Volterrova typu*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.14}$$

kde φ je spojitá funkce na segmentu $\langle a, b\rangle$ a jádro K je spojité na čtverci $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$. Na rozdíl od Fredholmovy rovnice je zde integrál funkcí horní meze x. Tuto rovnici lze formálně považovat za zvláštní případ Fredholmovy rovnice, definujeme-li pro $y > x$ jádro K rovností

$$K(x, y) = 0.$$

Zatímco u Fredholmovy integrální rovnice jsme se museli omezit na malé hodnoty parametru λ, můžeme u Volterrových rovnic použít BPPB a metody postupných aproximací pro *všechny* hodnoty parametru λ. Přesněji řečeno, jde o *toto zobecnění BPPB*:

14.5. Věta. *Nechť A je takové spojité zobrazení úplného metrického prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{X}$, že některá jeho mocnina $B = A^n$ je kontraktivní; potom rovnice*

$$Ax = x \tag{14.15}$$

má právě jedno řešení.

Důkaz. Nechť x je pevný bod zobrazení B, tj. $Bx = x$, a označme $Ax = x_0$. Platí

$$Ax = ABx = \cdots = AB^k x = A\underbrace{A\ldots A}_{kn}x = B^k Ax = B^k x_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Vzhledem ke kontraktivnosti zobrazení B konverguje posloupnost $\{B^k x_0\}_{k=1}^{\infty}$ pro libovolné $x_0 \in \mathcal{X}$ k pevnému bodu x zobrazení B. Platí tedy (14.15).

Jednoznačnost pevného bodu v (14.15) plyne z toho, že každý bod, který je pevným bodem zobrazení A, je také pevným bodem zobrazení A^n, a to může mít pouze jeden pevný bod. $\square$

Ukážeme nyní, že některá mocnina zobrazení

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)$$

je kontraktivním zobrazením. Nechť $f_1,\ f_2 \in C^0\langle a,b\rangle$. Potom

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x,y)[f_1(y) - f_2(y)]\,\mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| M (x-a) \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

kde je

$$M = \max_{x,y \in \langle a,b\rangle} |K(x,y)|.$$

Odtud

$$|A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x)| = |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x,y)[Af_1(y) - Af_2(y)]\,\mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)| \int_a^x (y-a)\,\mathrm{d}y =$$

$$= |\lambda|^2 M^2 \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)| \frac{(x-a)^2}{2}$$

a obecně

$$|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} m,$$

kde $m = \max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|$.

Pro každou hodnotu parametru λ lze zřejmě zvolit číslo n tak velké, aby platila nerovnost

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1\,.$$

Potom bude zobrazení A^n kontraktivní. Volterrova rovnice (14.14) má tedy pro libovolnou hodnotu parametru λ jediné řešení.

15.1. Definice. Množina M v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$ je možno vybrat podposloupnost, která konverguje k některému bodu $x \in \mathcal{X}$.[13]

Například, podle Bolzano-Weierstrassovy věty každá ohraničená množina na číselné přímce je kompaktní. Je zřejmé, že libovolná podmnožina kompaktní množiny je také kompaktní.

S pojmem kompaktnosti je těsně spojen pojem totální ohraničenosti, který nyní zavedeme.

15.2. Definice. Nechť M je nějaká množina v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ a $\varepsilon > 0$ nějaké číslo. Množinu $A \subset \mathcal{X}$ nazýváme *ε-sítí množiny M*, jestliže ke každému bodu $x \in M$ lze najít alespoň jeden takový bod $a \in A$, že

$$\varrho(x, a) \leq \varepsilon.$$

(Množina A nemusí být nutně podmnožinou množiny M, ba dokonce nemusí mít s množinou M ani jeden společný bod; existuje-li však nějaká ε-síť množiny M, je možno sestrojit 2ε-síť $B \subset M$.)

Například body v rovině s celočíselnými souřadnicemi tvoří $(\sqrt{2}/2)$-síť.

15.3. Definice. Množina M se nazývá *totálně ohraničená*, jestliže k *libovolnému* číslu $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť této množiny.

Zřejmě totálně ohraničená množina musí nutně být ohraničená,[14] protože jestliže se pro M nalezne ε-síť, která sestává z n bodů, potom průměr množiny M není větší než $(n+1)\varepsilon$. Ohraničená množina však nemusí být totálně ohraničená, jak plyne z příkladu 15.6.

Někdy bývá užitečná tato zřejmá skutečnost: *Je-li množina M totálně ohraničená, potom její uzávěr $\overline{M}$ je také totálně ohraničený.*

15.4. Věta. *Je-li metrický prostor $\mathcal{X}$ totálně ohraničený, potom je separabilní.*

Důkaz. Sestrojme v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ k libovolnému přirozenému číslu n konečnou $(1/n)$-síť A_n. Potom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná množina, která je hustá v $\mathcal{X}$. $\square$

15.5. Příklad. V n-rozměrném euklidovském prostoru *splývá totální ohraničenost s ohraničeností.* Jestliže totiž můžeme sestrojit takovou dostatečně velkou krychli,[15] že daná množina je částí této krychle, a jestliže takovou krychli rozložíme na krychličky s hranou délky ε, potom vrcholy těchto krychliček budou tvořit konečnou $(\sqrt{n}/2)\varepsilon$-síť v původní krychli, a tedy tím spíše v libovolné množině ležící uvnitř této krychle.

---

[13]Někteří autoři v definici kompaktnosti požadují $x \in M$. V takovém případě dále definují: Množina $M \subset \mathcal{X}$ se nazývá *prekompaktní*, je-li její uzávěr $\overline{M}$ kompaktní.

[14]Podmnožina M metrického prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *ohraničená*, jestliže její průměr je konečný.

[15]Přesněji *nadkrychli.*

15.6. Příklad. Jednotková kulová plocha S v prostoru l_2 je příkladem ohraničené, ale nikoliv totálně ohraničené množiny.[16] Na ploše S uvažujme body tvaru

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Vzdálenost mezi libovolnými dvěma takovými body e_n a e_m $(n \neq m)$ se rovná $\sqrt{2}$. Na základě tohoto faktu nyní dokážeme, že na ploše S neexistuje konečná ε-síť pro žádné číslo $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

Skutečně, je

$$\varrho(e_i, e_k) = \sqrt{2} \quad (i \neq k). \tag{15.1}$$

Zvolme bod b tak, že

$$\varrho(e_i, b) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \eta \quad (0 < \eta < \tfrac{\sqrt{2}}{2}). \tag{15.2}$$

Bod e_i nechť je pevný, bod e_k libovolný. Podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(e_i, e_k) \leq \varrho(e_i, b) + \varrho(e_k, b),$$

čili vzhledem k (15.1)

$$\sqrt{2} \leq \varrho(e_i, b) + \varrho(e_k, b). \tag{15.3}$$

Do (15.3) dosaďme (15.2):

$$\sqrt{2} \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \eta + \varrho(e_k, b).$$

Odtud

$$\varrho(e_k, b) \geq \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \eta \quad \forall k \neq i,$$

což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Následující věta uvádí do souvislosti pojmy kompaktnost, úplnost a totální ohraničenost.

[16] *Jednotková kulová plocha v prostoru* l_2 je množina všech takových bodů $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1$.

15.7. Věta. *Aby množina M, která leží v metrickém prostoru $\mathcal{X}$, byla kompaktní, je nutné a je-li $\mathcal{X}$ úplný, pak také stačí, aby byla totálně ohraničená.*

Důkaz. Nutnost. Předpokládejme, že množina M není totálně ohraničená, tj. předpokládejme, že pro některé $\varepsilon_0 > 0$ neexistuje v prostoru $\mathcal{X}$ konečná ε_0-síť množiny M. Zvolme libovolně bod $x_1 \in M$. V množině M lze najít alespoň jeden takový bod (označme jej x_2), že $\varrho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$ (jinak by bod x_1 byl ε_0-sítí množiny M). Dále lze zřejmě v množině M najít takový bod x_3, že

$$\varrho(x_1, x_3) > \varepsilon_0, \quad \varrho(x_2, x_3) > \varepsilon_0,$$

protože jinak by dvojice bodů x_1, x_2 byla ε_0-sítí v M. Jsou-li body $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nalezeny v M tak, že splňují

$$\varrho(x_i, x_j) > \varepsilon_0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, k),$$

potom nalezneme takový bod $x_{k+1} \in M$, že

$$\varrho(x_i, x_{k+1}) > \varepsilon_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Tato konstrukce vede k sestrojení nekonečné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, která nemá žádný hromadný bod, protože $\varrho(x_i, x_j) > \varepsilon_0$ pro $i \neq j$. Potom však množina M není kompaktní, což jsme měli dokázat.

Dostatečnost. Nechť prostor $\mathcal{X}$ je úplný a množina $M \subset \mathcal{X}$ totálně ohraničená. Dokážeme, že z každé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Položme

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = \tfrac{1}{2},\ \ldots\ , \varepsilon_k = \tfrac{1}{k},\ \ldots$$

a sestrojme v M pro každé ε_k odpovídající ε_k-síť:

$$a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ \ldots,\ a_{N_k}^{(k)}.$$

Opišme kolem každého z bodů, které tvoří 1-síť množiny M, kouli poloměru 1. Protože tyto koule pokrývají celou množinu M a jejich počet je konečný, potom alespoň jedna z nich (nazvěme ji S_1) obsahuje nějakou nekonečnou podposloupnost $\{x_n^{(1)}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$. Dále, okolo každého z bodů, které tvoří $\frac{1}{2}$-síť množiny M, opišme kouli poloměru $\frac{1}{2}$. Protože počet těchto koulí je opět konečný, potom alespoň jedna z nich (nazvěme ji S_2) obsahuje nekonečnou podposloupnost $\{x_n^{(2)}\}$ posloupnosti $\{x_n^{(1)}\}$. Dále nalezneme kouli S_3 poloměru $\frac{1}{3}$, která obsahuje nekonečnou podposloupnost $\{x_n^{(3)}\}$ posloupnosti $\{x_n^{(2)}\}$, atd.

Vyberme nyní z posloupností

$$\begin{gathered} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots, \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

„diagonální“ podposloupnost

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots;$$

tato podposloupnost je cauchyovská, protože všechny její členy, počínaje od $x_n^{(n)}$, leží uvnitř koule S_n poloměru $\frac{1}{n}$. Protože prostor $\mathcal{X}$ je úplný, má tato podposloupnost limitu $x \in \mathcal{X}$. $\square$

Často bývá vhodné následující zobecnění věty 15.7:

15.8. Věta. *Aby množina M, která leží v metrickém prostoru $\mathcal{X}$, byla kompaktní, je nutné a je-li $\mathcal{X}$ úplný, pak také stačí, aby pro každé $\varepsilon > 0$ existovala v $\mathcal{X}$ kompaktní ε-síť množiny M.*

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá, dokážeme její dostatečnost. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť A je kompaktní $\frac{\varepsilon}{2}$-síť množiny M. Vyberme v A konečnou $\frac{\varepsilon}{2}$-síť množiny A. Je zřejmé, že tato síť bude tvořit konečnou ε-síť množiny M; odtud plyne podle věty 15.7, že množina M je kompaktní.

16. Arzelova věta a její aplikace

Použití vět 15.7 a 15.8, které dávají nutné a postačující podmínky kompaktnosti, není v různých dílčích případech vždy jednoduché. Pro množiny ležící v tom či jiném speciálním metrickém prostoru bývají formulovány speciální kritéria kompaktnosti, které jsou mnohem vhodnější pro praktické užití.

V analýze jedním z nejdůležitějších metrických prostorů je prostor $C^0\langle a, b\rangle$. Pro množiny tohoto prostoru nejdůležitějším a nejčastěji užívaným kritériem kompaktnosti je tzv. *Arzelova věta.* Abychom ji mohli vyslovit, potřebuje nejprve zavést dva pojmy:

16.1. Definice. a) Nechť Φ je množina funkcí φ, které jsou definovány na segmentu $\langle a, b\rangle$. Jestliže existuje takové číslo K, že pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$ platí

$$|\varphi(x)| < K$$

pro všechna čísla $x \in \langle a, b\rangle$, potom řekneme, že funkce z množiny Φ jsou *stejnoměrně ohraničené.*[17]

b) Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna čísla $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ $(\varrho(x_1, x_2) < \delta)$ a pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$ platí

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon,$$

potom řekneme, že funkce z množiny Φ jsou *rovnomocně spojité.*[18]

16.2. Věta (Arzelova věta). *Aby množina $\Phi \subset C^0\langle a, b\rangle$ byla kompaktní*[19] *v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, je nutné a stačí, aby funkce z množiny Φ byly stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité.*

Důkaz. Nutnost. Nechť množina Φ je kompaktní v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Potom podle věty 15.7 ke každému kladnému ε existuje konečná $\frac{1}{3}\varepsilon$-síť $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\} \subset \Phi$ množiny Φ. Každá z funkcí φ_i je jakožto funkce spojitá na segmentu $\langle a, b\rangle$ *ohraničená:*

$$|\varphi_i(x)| \le K_i \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Položme $K = \max_i K_i + \frac{1}{3}\varepsilon$. Podle definice $\frac{1}{3}\varepsilon$-sítě pro každou funkci $\varphi \in \Phi$ platí, že existuje alespoň jedna funkce φ_i tak, že

$$\varrho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in \langle a, b\rangle} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

[17] Někdy se též říká *stejně ohraničené.*

[18] Někdy se též říká *stejně spojité.*

[19] V jiné terminologii *prekompaktní.*

Je tedy
$$|\varphi(x)| \le |\varphi_i(x)| + \tfrac{\varepsilon}{3} \le K_i + \tfrac{\varepsilon}{3} \le K.$$
Proto jsou funkce z množiny Φ stejnoměrně ohraničené.

Protože dále každá z funkcí φ_i, které tvoří $\frac{1}{3}\varepsilon$-síť, je spojitá, a tedy stejnoměrně spojitá na segmentu $\langle a, b\rangle$, existuje ke každému číslu $\frac{1}{3}\varepsilon$ takové číslo $\delta_i > 0$, že
$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{jestliže } |x_1 - x_2| < \delta_i\,.$$
Položme $\delta = \min\limits_i \delta_i$. K libovolné funkci $\varphi \in \Phi$ najděme takovou funkci φ_i, že $\varrho(\varphi, \varphi_i) < \frac{1}{3}\varepsilon$; potom pro $|x_1 - x_2| < \delta$ platí
$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$
Stejnoměrná spojitost funkcí z množiny Φ je tím dokázána.

Postačitelnost. Nechť funkce z množiny Φ jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité. K tomu, abychom dokázali kompaktnost množiny Φ v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, stačí podle věty 15.7 dokázat, že pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ existuje v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ konečná ε-síť množiny Φ. Nechť
$$|\varphi(x)| \le K \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$$
pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$ a nechť číslo $\delta > 0$ je zvoleno tak, že
$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \tfrac{1}{5}\varepsilon, \quad \text{jestliže } |x_1 - x_2| < \delta$$
pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$.

Interval $\langle a, b\rangle$ na ose x rozdělíme body $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pro něž platí $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, na intervaly délky menší než δ a těmito body vedeme kolmice k ose x. Interval $\langle -K, K\rangle$ na ose y rozdělíme body $y_0, y_1, \ldots, y_m$, pro něž platí $-K = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = K$, na intervaly délky menší než $\frac{1}{5}\varepsilon$ a dělicími body vedeme kolmice k ose y. Takto jsme rozdělili obdélník $\langle a, b\rangle \times \langle -K, K\rangle$ v obdélníky s vodorovnou stranou menší než δ a svislou stranou menší než $\frac{1}{5}\varepsilon$. Nyní každé funkci $\varphi \in \Phi$ přiřadíme lomenou čáru $\psi(x)$, která má vrcholy ve vhodných uzlech $[x_k, y_l]$ sestrojené sítě tak, aby v bodech x_k se funkce $\psi(x)$ lišila od funkce $\varphi(x)$ o méně než $\frac{1}{5}\varepsilon$ (zřejmě taková lomená čára existuje).

Protože podle konstrukce
$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \tfrac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \tfrac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \tfrac{\varepsilon}{5},$$
platí
$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \tfrac{3}{5}\varepsilon.$$
Protože mezi body x_k a x_{k+1} je funkce $\psi(x)$ lineární, je
$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \tfrac{3}{5}\varepsilon \quad \forall x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle.$$
Nechť nyní x je libovolný bod segmentu $\langle a, b\rangle$ a x_k je ten ze zvolených dělicích bodů, který je k bodu x nejblíže zleva. Potom
$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \le \varepsilon.$$
Tedy lomené čáry $\psi(x)$ tvoří ε-síť množiny Φ. Jejich počet je zřejmě konečný, takže množina Φ je totálně ohraničená. $\square$

Abychom se vyhnuli pojmu kompaktnosti, formulovali jsme v [Že1] právě dokázanou Arzelovu větu v této formě: *Z každé posloupnosti stejnoměrně ohraničených a rovnomocně spojitých funkcí na segmentu $\langle a, b\rangle$ lze vybrat posloupnost funkcí, která stejnoměrně konverguje na segmentu $\langle a, b\rangle$.*

S pomocí této věty je v [Že1, str.47-48] dokázána tato existenční věta pro počáteční problém diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$:

16.3. Věta (Peano). *Mějme diferenciální rovnici*

$$y' = f(x,y)\,.$$

Je-li funkce $f(x,y)$ spojitá v nějaké uzavřené oblasti $\overline{G}$, potom každým vnitřním bodem $[x_0,y_0] \in G$ této oblasti prochází alespoň jedna integrální křivka této rovnice.

16.4. Poznámka. Protože na rozdíl od Picardovy věty ve větě 16.3 nepředpokládáme, že funkce $f(x,y)$ splňuje Lipschitzovu podmínku, nemáme zaručenu jednoznačnost řešení; zaručena je pouze jeho existence.

17. Normované prostory konečné dimenze

17.1. Tvrzení. *Lineární prostor $X(n)$ dimenze n je izomorfní*[20] *s množinou vektorů n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, a proto můžeme považovat prvky uvažovaného prostoru $X(n)$ za n-tice čísel.*

Důkaz. Nechť $e_1, e_2, \dots, e_n$ je nějaká báze prostoru $X(n)$. Jak známo, každý prvek $x \in X(n)$ může být jednoznačně vyjádřen ve tvaru

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\,.$$

Přiřadíme-li prvku x vektor $\overline{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, stanovíme tím vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi $X(n)$ a $\mathbb{R}^n$, která je lineárním izomorfizmem, protože platí

$$x \leftrightarrow \overline{x},\ y \leftrightarrow \overline{y} \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \leftrightarrow \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}\,.$$

Proto můžeme považovat $X(n)$ za vektorový prostor. $\square$

Následující věta je zobecněním Bolzano-Weierstrassovy věty, podle které každá ohraničená množina v $\mathbb{R}^1$ je kompaktní. Důkaz lze nalézt např. v [Že1, str. 169 – 170].

17.2. Věta. *Aby množina E n-rozměrného normovaného prostoru $X(n)$ byla kompaktní, je nutné a stačí, aby byla ohraničená.*

Věta 17.1 má jednoduchý důsledek, který je pro teorii n-rozměrných normovaných prostorů zásadní. Formulujeme jej ve Větě 17.3.

17.3. *Každý normovaný prostor konečné dimenze je úplný.*

Důkaz. Nechť $\{x_\nu\} \subset X(n)$ je cauchyovská posloupnost. Dokážeme, že je ohraničená: Zvolme $\varepsilon = 1$. Potom existuje $N = N(1)$ tak, že $\|x_\nu - x_\mu\| < 1$ pro $\mu, \nu > N$. Platí

$$\|x_k\| \le K, \quad k = 1, \dots, N \quad (K = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{N+1}\|\}),$$

$$\|x_j\| = \|x_j + x_{N+1} - x_{N+1}\| \le \|x_{N+1}\| + \|x_j - x_{N+1}\| \le K + 1 \quad (j = N+1, N+2, \dots),$$

čímž je ohraničenost $\{x_\nu\}$ dokázána.

Podle Věty 17.2 existuje taková posloupnost přirozených čísel $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \cdots$, že

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{\nu_k} - x_0\| = 0\,, \tag{17.1}$$

kde $x_0 \in X(n)$ je nějaký prvek $X(n)$. Protože posloupnost $\{x_\nu\}$ je cauchyovská, platí podle (17.1)

$$\|x_\nu - x_0\| \le \|x_\nu - x_{\nu_k}\| + \|x_{\nu_k} - x_0\| \to 0\,,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

[20] Lineární prostory $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$ se nazývají *izomorfní*, existuje-li takové prosté zobrazení prostoru $\mathcal{L}$ na prostor $\mathcal{L}^*$, které zachovává operace, tj. když $x \leftrightarrow x^*$, $y \leftrightarrow y^*$ $x, y \in \mathcal{L}$, $x^*, y^* \in \mathcal{L}^*$, potom $\alpha x + \beta y \leftrightarrow \alpha x^* + \beta y^*$.

17.4. Důsledek. *Konečně dimenzionální lineární množina X_0 libovolného normovaného prostoru $\mathcal{R}$ je uzavřená.*

Důkaz. Nechť $\{x_k\} \subset X_0$ je konvergentní posloupnost v $\mathcal{R}$. Máme dokázat, že limita této posloupnosti (označme ji x) náleží do X_0.

Množina X_0 uvažovaná sama o sobě je lineární prostor konečné dimenze a jako podmnožina prostoru $\mathcal{R}$ je normovaným prostorem, jehož norma je indukována normou $\mathcal{R}$. Podle Věty 17.3 je X_0 úplným prostorem, takže každá cauchyovská posloupnost prvků z X_0 je konvergentní v X_0. Posloupnost $\{x_k\} \subset X_0$ konvergentní v $\mathcal{R}$ je cauchyovská v X_0, a tedy má limitu v X_0. $\square$

17.5. Důsledek. *Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor a X_0 konečně dimenzionální lineární množina v $\mathcal{R}$. K libovolnému prvku $x \in \mathcal{R}$ existuje prvek $x_0 \in X_0$, který realizuje vzdálenost prvku x od X_0, tj. takový, že $\|x - x_0\| = \varrho(x, X_0)$.*

Důkaz. Pro každé $k = 1, 2, \dots$ lze najít v X_0 prvek x_k tak, že

$$\|x - x_k\| < \varrho(x, X_0) + \tfrac{1}{k}\,. \tag{17.2}$$

Posloupnost $\{x_k\}$ je ohraničená, protože

$$\|x_k\| \le \|x\| + \|x - x_k\| < \|x\| + \varrho(x, X_0) + 1 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

proto podle Věty 17.2 z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{k_j}\} : x_{k_j} \to x_0$. Odtud a z nerovnosti (17.2) plyne

$$\|x - x_0\| \le \varrho(x, X_0),$$

a protože $x_0 \in X_0$, platí i obrácená nerovnost. $\square$

17.6. Příklad. Jako aplikaci Důsledku 17.5 uvažujme prostor $C^0\langle a, b\rangle$ a jeho n-rozměrný podprostor $\mathcal{P}_n\langle a, b\rangle$, který sestává ze všech algebraických polynomů, jejichž stupeň není větší než n. Podle Důsledku 17.5 k libovolné spojité funkci $x \in C^0\langle a, b\rangle$ existuje takový polynom $x_0 \in \mathcal{P}_n\langle a, b\rangle$, že

$$\max_{a \le t \le b} |x(t) - x_0(t)| = \|x - x_0\| = \varrho(x, \mathcal{P}_n)\,,$$

tj. existuje polynom, který nejlépe aproximuje funkci $x(t)$ ve srovnání se všemi ostatními polynomy, jejichž stupeň nepřevyšuje n.

Výsledek uvedený ve Větě 17.2 lze obrátit, tj. dokážeme, že libovolná ohraničená množina je v normovaném prostoru kompaktní pouze tehdy, když má daný prostor konečnou dimenzi: Nejprve dokážeme důležité lemma, které se někdy nazývá lemma o kvazikolmici.

17.7. Lemma. *Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor a $X_0 \ne \mathcal{R}$ jeho podprostor. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový normovaný prvek x_0 (tj. pro který $\|x_0\| = 1$), že*

$$\varrho(x_0, X_0) > 1 - \varepsilon\,.$$

Důkaz. Protože X_0 je uzavřená množina, která není totožná s $\mathcal{R}$, existuje takový prvek $\overline{x} \in \mathcal{R}$, že $\varrho(\overline{x}, X_0) = d > 0$. V X_0 lze nalézt takový prvek x', že

$$\|\overline{x} - x'\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Položme

$$x_0 = \frac{\overline{x} - x'}{\|\overline{x} - x'\|} = \alpha(\overline{x} - x') \quad \left(\alpha = \frac{1}{\|\overline{x} - x'\|} > \frac{1 - \varepsilon}{d}\right).$$

Zřejmě $\|x_0\| = 1$. Kromě toho, jestliže $x \in X_0$, potom

$$\|x_0 - x\| = \|\alpha\overline{x} - \alpha x' - x\| = \alpha \left\|\overline{x} - \left(x' + \frac{x}{\alpha}\right)\right\| \ge \alpha d > \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon\,,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

17.8. Poznámka. Normovaný prvek $x_0 \in \mathcal{R}$, který má vlastnost $\varrho(x_0, X_0) = 1$, je ve známém smyslu kolmicí k X_0 (protože v euklidovském prostoru vektor x_0 mající tuto vlastnost je skutečně ortogonální k X_0). V souvislosti s tímto budeme nazývat dokázané lemma *lemmatem o kvazikolmici* (*skorokolmici*).

17.9. Věta (Riesz). *Aby každá ohraničená množina byla v normovaném prostoru $\mathcal{R}$ kompaktní, je nutné a stačí, aby $\mathcal{R}$ měl konečnou dimenzi.*

Důkaz. a) *Dostatečnost* podmínky plyne z Věty 17.2.

b) *Nutnost.* Uvažujme libovolný normovaný prvek $x_1 \in \mathcal{R}$ a označme symbolem X_1 lineární obal $\mathcal{L}(\{x_1\})$ tohoto prvku, tj. množinu prvků tvaru λx_1.

Za předpokladu, že $\mathcal{R}$ má nekonečnou dimenzi, platí $X_1 \neq \mathcal{R}$, a podle Lemmatu 17.7 existuje takový normovaný prvek $x_2 \in \mathcal{R}$, že $\varrho(x_2, X_1) > \frac{1}{2}$. Vytvoříme lineární obal prvků x_1 a x_2, který označíme X_2. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, dospějeme k posloupnosti prvků $\{x_n\}$ a podprostorů $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ takových, že

$$\|x_n\| = 1; \quad X_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}); \quad \varrho(x_{n+1}, X_n) > \tfrac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{17.3}$$

Na základě (17.3) platí

$$\|x_n - x_m\| > \tfrac{1}{2} \quad (n > m;\ m, n = 1, 2, \ldots),$$

takže ani posloupnost $\{x_n\}$, ani její libovolná podposloupnost nejsou konvergentní. $\square$

Důkaz posledního obecného výsledku této kapitoly, který je uveden ve Větě 17.11, je velmi komplikovaný a proto odkazujeme na [Že1, str. 172 – 175]. Nejprve uvedeme definici ekvivalentních norem.

17.10. Definice. Nechť $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ jsou dva normované prostory definované na témže lineárním prostoru $\mathcal{L}$ normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Říkáme, že tyto normy jsou ekvivalentní, jestliže existují takové konstanty $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$ (závisející na volbě norem $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$), že

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathcal{L}\,.$$

17.11. Věta. *Nechť n je libovolné přirozené číslo. Dvě libovolné normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ definované na témže lineárním prostoru $X(n)$ konečné dimenze n jsou ekvivalentní, tj. existují takové konstanty $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$, že*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X(n)\,. \tag{17.4}$$

17.12. Příklad. Místo zmíněného komplikovaného důkazu budeme platnost Věty 17.11 demonstrovat na důkazu ekvivalentnosti norem prostorů R_p^n, které jsou definovány na témže lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ (viz Příklady 3.3, 3.4 a 3.5). Platí

$$R_p^n = \left(\mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right)$$

a v limitě pro $p \to \infty$

$$R_\infty^n = \Big(\mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|\Big).$$

Zvolme libovolně, ale pevně $p \geq 1$, $q \geq 1$. Analogicky jako v Poznámce 3.5a dostaneme

$$\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q}} \|x\|_\infty, \quad \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_q.$$

Odtud plyne tento řetěz nerovností

$$\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q}} \|x\|_\infty \leq n^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{p}} \|x\|_q,$$

který dává

$$\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{p}} \|x\|_q.$$

Odtud po vydělení výrazem $n^{\frac{1}{q}}$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_q.$$

Tedy v souladu s nerovnostmi (17.4)

$$C_1 \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C_2 \|x\|_q,$$

kde $C_1 = 1/n^{\frac{1}{q}}$, $C_2 = n^{\frac{1}{p}}$.

Věta 17.11 má mnohostranné užití v matematické teorii numerických metod, zejména v teorii metody konečných prvků. Uvedeme alespoň jednu aplikaci z tohoto oboru.

17.13. Věta. *Nechť $p(x, y)$ je polynom nanejvýš prvního stupně a $\overline{T}$ trojúhelník s vrcholy $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Potom*

$$\max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x, y)| \leq \frac{C}{h_T \sqrt{\sin \vartheta_T}} \|p\|_{L_2(T)}\,, \tag{17.5}$$

kde h_T je nejdelší strana trojúhelníka $\overline{T}$, ϑ_T nejmenší úhel trojúhelníka T a C je konstanta nezávislá na $\overline{T}$ a polynomu $p(x, y)$.

Důkaz. A) Uvedeme nejprve několik pomocných výsledků. Nechť $\overline{T}_0$ je trojúhelník, který leží v kartézském souřadném systému (ξ, η) a má vrcholy $R_1(0, 0)$, $R_2(1, 0)$, $R_3(0, 1)$. Transformace

$$x = x^*(\xi, \eta) \equiv x_1 + \overline{x}_2\xi + \overline{x}_3\eta, \quad y = y^*(\xi, \eta) \equiv y_1 + \overline{y}_2\xi + \overline{y}_3\eta, \tag{17.6}$$

kde

$$\overline{x}_i = x_i - x_1, \quad \overline{y}_i = y_i - y_1 \quad (i = 2, 3),$$

zobrazuje vzájemně jednoznačně trojúhelník $\overline{T}_0$ na $\overline{T}$. Pro jakobián $J_T \equiv \overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2$ transformace (17.6) platí[21]

$$\tfrac{1}{2} h_T^2 \sin \vartheta_T \leq |J_T| \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2} h_T^2. \tag{17.7}$$

[21]Podle věty o transformaci integrálu

$$\mathrm{mes}_2 T = \int_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{T_0} |J_T|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \tfrac{1}{2}|J_T|. \tag{*}$$

Na druhé straně,

$$\tfrac{1}{2} h_T^2 \sin \vartheta_T \leq 2\mathrm{mes}_2 T \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2} h_T^2. \tag{**}$$

Druhá nerovnost (**) je evidentní. Dokážeme první: Nechť $a_T \leq b_T \leq c_T \equiv h_T$ jsou délky stran trojúhelníka T. Potom $2\mathrm{mes}_2 T = b_T h_T \sin \vartheta_T$. Protože $h_T < a_T + b_T$, platí $\frac{1}{2} h_T < b_T$. Odtud plyne (**). Vztahy (*), (**) implikují (17.7).

B) Linearita $p(x,y)$ implikuje

$$\max_{\overline{T}} |p| = \max_{i=1,2,3} |p(P_i)| \,. \tag{17.8}$$

Položíme-li

$$p^*(\xi,\eta) = p(x^*(\xi,\eta), y^*(\xi,\eta)),$$

kde $x = x^*(\xi,\eta),\ y = y^*(\xi,\eta)$ je transformace (17.6), dostaneme ze (17.8)

$$\max_{\overline{T}} |p| = \max_{\overline{T}_0} |p^*| \,. \tag{17.9}$$

Věta 17.11 implikuje ($\mathcal{L}$ je zde trojrozměrný prostor polynomů nanejvýš 1. stupně na $\overline{T}_0$)

$$\max_{\overline{T}_0} |p^*| \le C_2 \|p^*\|_{L_2(T_0)} \,, \tag{17.10}$$

kde konstanta C závisí pouze na $\overline{T}_0$.

Protože

$$\|p\|^2_{L_2(T)} = \int_T [p(x,y)]^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{T_0} [p^*(\xi,\eta)]^2 |J_T| \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = |J_T| \cdot \|p^*\|^2_{L_2(T_0)} \,,$$

podle (17.7) platí

$$\|p^*\|_{L_2(T_0)} = \frac{1}{\sqrt{|J_T|}} \|p\|_{L_2(T)} \le \frac{C}{h_T \sqrt{\sin\vartheta_T}} \|p\|_{L_2(T)} \,, \tag{17.11}$$

kde jsme zahrnuli $\sqrt{2}$ do konstanty C. Ze vztahů (17.9) – (17.11) plyne odhad (17.5). $\square$

Abychom dostali nerovnost typu (17.4), vynásobme nerovnost (17.5) výrazem $C^{-1} h_T \sqrt{\sin\vartheta_T}$, takže

$$C^{-1} h_T \sqrt{\sin\vartheta_T} \max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x,y)| \le \|p\|_{L_2(T)}.$$

Protože

$$\|p\|_{L_2(T)} = \sqrt{\int_T [p(x,y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \le \max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x,y)| \sqrt{\mathrm{meas}_2\, T},$$

dostáváme nerovnost (17.4) ve tvaru

$$C^{-1} h_T \sqrt{\sin\vartheta_T} \max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x,y)| \le \|p\|_{L_2(T)} \le \sqrt{\mathrm{meas}_2\, T} \max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x,y)|, \tag{17.12}$$

kde tedy pro konstanty C_1 a C_2 platí

$$C_1 = C^{-1} h_T \sqrt{\sin\vartheta_T}, \quad C_2 = \sqrt{\mathrm{meas}_2\, T}.$$

Veličina $\max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x,y)|$ je identická s normou $\|p\|_{C^0(\overline{T})}$ a lze ji v tomto případě interpretovat jako normu na trojrozměrném lineárním prostoru všech polynomů dvou proměnných, jejichž stupeň je nanejvýš roven jedné.

V teorii metody konečných prvků má všem zásadní význam nerovnost (17.5) a ne z ní odvozená nerovnost (17.12).

17.14. Konečný prvek jako lineární prostor. Hovoříme-li o *konečném prvku*, máme na mysli tyto tři skutečnosti:

1. Geometrický útvar. V aplikacích metody konečných prvků v dvojrozměrných problémech to bývá nejčastěji trojúhelník.

2. Funkce jednoznačně zadaná konečným počtem hodnot. V případě trojúhelníků jsou to polynomy stupně nanejvýš n, kde n je pevně dané. Každý polynom (nanejvýš) n-tého stupně lze jednoznačně určit celkovým počtem $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ hodnot. To proto, že polynom (nanejvýš) n-tého stupně dvou proměnných je lineární kombinací mononomů tvaru

$$x^i y^j, \quad \text{kde } 0 \le i + j \le n, \tag{17.13}$$

kterých je celkem N:

$$p(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + \cdots + a_{N-1} xy^{n-1} + a_N y^n.$$

Je-li $a_2 = \cdots = a_N$, vidíme, že polynom (nanejvýš) n-tého stupně dvou proměnných obsahuje jako speciální případ konstantu, je-li $a_4 = \cdots = a_N$, vidíme, že polynom (nanejvýš) n-tého stupně dvou proměnných obsahuje jako speciální případ polynom prvního stupně, atd.

3. Parametry. Hodnoty, které jednoznačně určují polynom $p(x,y)$ (nanejvýš) n-tého stupně, se v metodě konečných prvků volí jako funkční hodnoty, případně derivace předepsané v některých bodech uvažovaného geometrického útvaru (tj. trojúhelníka, je-li geometrickým útvarem trojúhelník). Tyto hodnoty pak nazýváme *parametry* a volíme je obvykle tak, aby hodnota polynomu $p(x,y)$ byla v libovolném bodě strany trojúhelníka T určena pouze parametry, které jsou předepsány v bodech této strany.

Takto zadaný polynom potom uvažujeme pouze v bodech $[x,y] \in \overline{T}$. Každý takový polynom je jednoznačně určen N-ticí parametrů $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ a protože tyto N-tice tvoří N-rozměrný lineární prostor, je množina všech takových polynomů N-rozměrným lineárním prostorem, ve kterém je sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem definováno přirozeným způsobem (viz Příklad 2.18).

Každý takový lineární prostor nazýváme *konečný prvek.* Je jednoznačně určen geometrickým útvarem, typem funkce a parametry.

17.15. Příklady trojúhelníkových prvků. Ukážeme zde, jak v případech různých n lze zadat N parametrů, aby byly splněny výše kladené požadavky na parametry. (Důkaz, že tomu tak skutečně je, bude uveden v kurzu *Numerické metody III.*) Symboly P_1, P_2, P_3 budou značit vrcholy trojúhelníka $\overline{T}$, symbol P_0 jeho těžiště a symboly Q_1, Q_2, Q_3 půlicí body stran.

1. $n = 1$; potom $N = 3$ a trojice parametrů je tvaru

$$p(P_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

K této trojici parametrů náleží polynom $p(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$, jehož koeficienty a_1, a_2, a_3 určíme řešením soustavy tří lineárních algebraických rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 &= p(P_1), \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 &= p(P_2), \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 &= p(P_3), \end{aligned}$$

kde x_i, y_i jsou souřadnice vrcholu P_i.

2. $n = 2$; potom $N = 6$ a šestice parametrů je tvaru

$$p(P_i),\ p(Q_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

3a. $n = 3$; potom $N = 10$ a deset parametrů obvykle volíme tvaru

$$p(P_i) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad \frac{\partial p}{\partial x}(P_j),\ \frac{\partial p}{\partial y}(P_j) \quad (j = 1, 2, 3).$$

3b. Chceme-li v případě $n = 3$ zadat jako parametry pouze funkční hodnoty, potom kromě parametrů $p(P_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ volíme dalších šest parametrů ve tvaru funkčních hodnot v bodech, které dělí strany trojúhelníka na třetiny.

17.16. Příklad obdélníkového prvku. Nechť $\overline{D}$ je obdélník se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a vrcholy $P_1, \ldots, P_4$. V tomto případě budeme při daném n uvažovat jako typy funkcí lineární kombinace mononomů tvaru

$$x^i y^j \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n). \tag{17.14}$$

V případě $n = 1$ to budou bilineární polynomy (tj. lineární v každé proměnné, je-li druhá proměnná pevné číslo)

$$p(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy.$$

Parametry jsou v tomto případě čtyři a jsou to funkční hodnoty $p(P_1), \ldots, p(P_4)$ bilineárního polynomu ve vrcholech obdélníka $\overline{D}$.

17.17. Příklad čtyřstěnného prvku. Analogií trojúhelníka ve třech dimenzích je čtyřstěn. Polynom $p(x, y, z)$ tří proměnných je lineární kombinací mononomů tvaru

$$x^i y^j z^k \quad (0 \leq i + j + k \leq n). \tag{17.15}$$

Příslušný polynom $p(x, y, z)$ má celkem $N = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ koeficientů $a_1, \ldots, a_N$, k jejichž určení je zapotřebí N parametrů. V nejjednodušším případě $n = 1$ jde o čtyři parametry, za které volíme funkční hodnoty $p(P_i)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ ve vrcholech čtyřstěnu.

17.18. Analytický význam konečných prvků. Tento význam vysvětlíme v případě trojúhelníkových prvků. Mějme uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí. Tuto oblast ztriangulujme, tj. rozdělme na konečný počet trojúhelníků tak, že libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i$, $\overline{T}_j$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu. Zvolme typ konečného prvku a na každém prvku zvolme příslušné uzlové body. To znamená, že uzlové body na společné straně dvou trojúhelníků budou totožné. Na každém trojúhelníku zadejme příslušných N parametrů tak, že ve společných uzlových bodech dvou nebo více trojúhelníků budou parametry totožné. (Případ uzlového bodu společného více než dvěma trojúhelníkům nastává, když uzlový bod je společným vrcholem několika trojúhelníků.) Z vlastnosti **3** uvedené v 17.14 pak plyne, že takto zadaným parametrům přísluší na $\overline{\Omega}$ funkce, která náleží do $C^0(\overline{\Omega})$ a je po uzavřených trojúhelnících $\overline{T}_i$ dané triangulace uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ polynomem (nanejvýš) n-tého stupně.

Poznamenejme, že v případě **3a** uvedeném v Příkladě 17.15 budou parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ globální funkce f spojité nejen ve vnitřních bodech každého trojúhelníka dané triangulace, ale i ve společných vrcholech jednotlivých trojúhelníků (protože tyto hodnoty jsou přímo zadány jako parametry.)

18. Funkcionály a lineární funkcionály

18.1. Definice. Číselnou funkci $f(x)$ definovanou na některém normovaném prostoru $\mathcal{R} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ budeme nazývat *funkcionálem.* Funkcionál $f(x)$ se nazývá *lineární*, jestliže

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

kde x, $y \in \mathcal{R}$ a α, β jsou libovolné skaláry.

18.2. Definice. a) Funkcionál $f(x)$ se nazývá *spojitý v bodě* x_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí $U = U_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ bodu x_0, ve kterém je funkcionál $f(x)$ definován a platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U. \tag{18.1}$$

Trochu jinými slovy: Funkcionál $f(x)$ se nazývá *spojitý v bodě* x_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že pro všechny body $x \in \mathcal{L}$ splňující

$$\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$$

platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{18.1a}$$

Funkcionál f se nazývá *spojitý v normovaném prostoru* $\mathcal{R}$, je-li spojitý v každém bodě $x \in \mathcal{R}$. Stejně se definuje spojitost v bodě a spojitost v $\mathcal{R}$ lineárního funkcionálu.

b) Funkcionál $f(x)$ se nazývá *rovnoměrně spojitý v normovaném prostoru* $\mathcal{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že z nerovnosti

$$\|x_1 - x_2\| < \delta(\varepsilon), \quad x_1, x_2 \in \mathcal{R}$$

plyne, že

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{18.1b}$$

c) Funkcionál $f(x)$ se nazývá *lipschitzovsky spojitý v normovaném prostoru* $\mathcal{R}$, jestliže existuje konstanta $L > 0$ tak, že

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}. \tag{18.1c}$$

18.2a. Poznámka. Stejně jako Větu 12.2 můžeme dokázat toto tvrzení: *Funkcionál f je spojitý v bodě $x_0 \in \mathcal{R}$, když a jen když $f(x_n) \to f(x_0)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ konvergující v $\mathcal{R}$ k bodu x_0*, tj.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Limita na levé straně je v $\mathbb{R}^1$, na pravé straně v $\mathcal{R}$. $\square$

18.2b. Poznámka. a) *Funkcionál f rovnoměrně spojitý v $\mathcal{R}$ je spojitý v $\mathcal{R}$.*

To je vidět okamžitě: Nechť bod x_2 je pevný a x_1 proměnný a položme $x_0 = x_2$ a $x = x_1$. Potom (18.1b) přejde v (18.1a).

b) *Funkcionál f lipschitzovsky spojitý v $\mathcal{R}$ je rovnoměrně spojitý v $\mathcal{R}$.*

Skutečně: Pro $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon/L$ z (18.1c) plyne (18.1b).

18.2c. Příklady lipschitzovsky spojitých funkcionálů a funkcí.

1. Funkcionál $f(x) = \|x\|$ je lipschitzovsky spojitý na normovaném prostoru $\mathcal{R}$: Z trojúhelníkových nerovností

$$\|x\| = \|y + x - y\| \le \|y\| + \|x - y\|, \quad \|y\| = \|x + y - x\| \le \|x\| + \|x - y\|$$

plyne $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$, takže v tomto případě je $L = 1$.

2. Připomeňme si *Lagrangeovu větu* z matematické analýzy: *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f'(x)$ existuje v (a, b). Potom existuje bod $c \in (a, b)$ (tj. $a < c < b$) tak, že*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Přechodem k absolutním hodnotám dostaneme

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a|.$$

Je-li navíc $|f'(x)| \le L$ pro $x \in (a, b)$, potom

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle.$$

3. Zobecníme předchozí výsledek: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má v podintervalech (x_{i-1}, x_i) ohraničenou derivaci, tj.

$$|f'(x)| \le L \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i) \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

kde $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Potom

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \le |\alpha - \beta| \quad \forall \alpha, \beta \in \langle a, b\rangle.$$

Tvrzení dokážeme v případě, že $\alpha \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\beta \in \langle x_{i+1}, x_{i+2}\rangle$. Platí

$$\begin{aligned}|f(\alpha) - f(\beta)| &\le |f(\alpha) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(\beta)| \le \\ &\le L(|\alpha - x_i| + |x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - \beta|) = L|\alpha - \beta|.\end{aligned}$$

Speciálním případem jak tohoto výsledku, tak prvního příkladu je funkce $f(x) = |x|$, která nemá derivaci v bodě $x = 0$.

4. Zobecněme výsledek příkladu 2 na případ funkce tří proměnných. Platí: *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je definovaná a spojitá v ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ a nechť má spojité parciální derivace 1. řádu uvnitř oblasti Ω. Nechť $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ jsou takové dva vnitřní body oblasti Ω, že úsečka $\overline{P_0P_1}$ leží celá v Ω. Potom existuje takový bod $P_2(x_0 + \vartheta(x_1 - x_0), y_0 + \vartheta(y_1 - y_0), z_0 + \vartheta(z_1 - z_0))$ $(0 < \vartheta < 1)$, že platí*

$$f(P_1) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_2)(x_1 - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_2)(y_1 - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_2)(z_1 - z_0).$$

Nechť navíc platí

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right|, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right|, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right| \le L \quad \forall P \in \Omega$$

a oblast Ω je konvexní. Potom

$$|f(P_1) - f(P_0)| \le L(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0|) = L\|P_1 - P_0\|_1 \quad \forall P_0, P_1 \in \Omega.$$

Z kap. 17 plyne, že $\|P_1 - P_0\|_1 \le C_2\|P_1 - P_0\|_2$, takže

$$|f(P_1) - f(P_0)| \le C_2 L\|P_1 - P_0\|_2,$$

což je klasická Lipschitzova podmínka pro funkce více proměnných.

18.3. Věta. *Je-li lineární funkcionál $f(x)$ spojitý v libovolném jednom bodě $x_0 \in \mathcal{R}$, potom je spojitý všude v $\mathcal{R}$.*

Důkaz. Nechť je lineární funkcionál spojitý v bodě $x = x_0$. To je rovnocenné podle Poznámky 18.2a tomu, že

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad \text{pro } x_n \to x_0.$$

Nechť dále $y_n \to y$. Potom

$$f(y_n) = f(y_n - y + x_0 + y - x_0) = f(y_n - y + x_0) + f(y) - f(x_0). \tag{18.2}$$

Avšak $y_n - y + x_0 \to x_0$. Odtud podle předpokladu dokazované věty plyne

$$f(y_n - y + x_0) \to f(x_0).$$

Tedy podle (18.2)

$$f(y_n) \to f(x_0) + f(y) - f(x_0) = f(y),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Stačí tedy ověřovat spojitost lineárního funkcionálu v jednom bodě, např. v bodě $x = \theta$.

18.4. Definice. Říkáme, že funkcionál $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^1$, kde $\mathcal{R} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, je *ohraničený*, jestliže existuje takové číslo $M > 0$, že

$$|f(x)| \le M\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{R}. \tag{18.3}$$

18.5. Věta. *Lineární funkcionál $f(x)$ je spojitý, když a jen když je ohraničený.*

Důkaz. a) Předpokládejme, že lineární funkcionál $f(x)$ není ohraničený. Potom ke každému přirozenému číslu n lze najít takový prvek $x_n \in \mathcal{R}$, že

$$|f(x_n)| > n\|x\|. \tag{18.4}$$

Položme

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}. \tag{18.5}$$

Potom $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, tj. $\|y_n - \theta\| = \frac{1}{n}$, takže $y_n \to \theta$. Ale současně podle (18.5) a (18.4)

$$|f(y_n)| = \left|f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right| = \frac{1}{n\|x_n\|}|f(x_n)| > 1.$$

Protože $f(\theta) = 0$ pro každý lineární funkcionál, vidíme, že v bodě $x = \theta$ není funkcionál $f(x)$ spojitý. Negací dokázané implikace dostáváme, že každý spojitý funkcionál je ohraničený.

b) Nechť nyní číslo M, které splňuje podmínku (18.3), existuje. Potom pro libovolnou posloupnost $x_n \to \theta$ platí

$$|f(x_n)| \le M\|x_n\| \to 0,$$

tj. funkcionál $f(x)$ je spojitý v bodě $x = \theta$, a tedy (podle Věty 18.3) je spojitý ve všech bodech $x \in \mathcal{R}$. □

18.6. Definice. Veličinu

$$\|f\|_* = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \tag{18.6}$$

nazýváme *normou* lineárního funkcionálu $f(x)$.

Poznamenejme, že norma lineárního funkcionálu daná vztahem (18.6) je nejmenší hodnota čísla M ze vztahu (18.3).

18.7. Příklad. Uvažujme normovaný prostor $R^1 = (\mathbb{R}^1, \|x\| = |x|)$ a v něm funkci $f(x) = kx$. Tato funkce je lineární funkcionál na R^1, protože

$$f(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) = \alpha kx + \beta ky = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Platí

$$|f(x)| = |k| \cdot |x| = |k| \cdot \|x\|,$$

takže podle (18.6) je $\|f\|_* = |k|$. Pozor: lineární funkce $ax + b$ není lineární funkcionál.

18.8. Příklad. Nechť $R^{(n)}$ je n-rozměrný euklidovský prostor a $a \in R^{(n)}$ libovolný pevný vektor. Položme

$$f(x) = (x, a) \quad \forall x \in R^{(n)}\,,$$

kde (x, a) je skalární součin vektorů x a a. Je zřejmé, že $f(x)$ je lineární funkcionál:

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, a) = \alpha(x, a) + \beta(y, a) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pro všechny vektory x, $y \in R^{(n)}$ a všechna čísla α, β. Dále, podle Schwarzovy nerovnosti

$$|f(x)| = |(x, a)| \leq \|x\| \cdot \|a\|. \tag{18.9}$$

Odtud plyne, že funkcionál $f(x)$ je ohraničený, a proto spojitý. Ze vztahu (18.9) plyne

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|\,.$$

Protože pravá strana této nerovnosti nezávisí na x, platí

$$\sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|\,,$$

tj. $\|f\|_* \leq \|a\|$. Ale položíme-li $x = a$, dostaneme:

$$|f(a)| = (a, a) = \|a\|^2 \Rightarrow \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Proto

$$\|f\|_* = \|a\|\,.$$

18.9. Příklad. Integrál

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $a < b$ a $x(t)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, je lineární funkcionál na prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Jeho norma je rovna $b - a$. Skutečně

$$|I(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{a\le t\le b} |x(t)|(b-a)\,,$$

přičemž pro $x = \mathrm{const}$ nastává rovnost.

18.10. Příklad. Uvažujme obecnější příklad než je Příklad 18.9. Nechť $y_0(t)$ je nějaká pevná funkce z prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Položme

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in C^0\langle a, b\rangle\,.$$

Tento vztah definuje lineární funkcionál na $C^0\langle a, b\rangle$, protože

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))y_0(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \alpha \int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b y(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pro všechny funkce x, $y \in C^0\langle a, b\rangle$ a všechna čísla α, β. Tento funkcionál je ohraničený:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \|x\| \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{18.7}$$

Tedy funkcionál $f(x)$ je lineární a ohraničený, takže je i spojitý.

Z (18.7) prozatím plyne, že

$$\|f\|_* \le \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.8}$$

Dokážeme, že

$$\|f\|_* = \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.9}$$

K tomu stačí dokázat, že

$$\|f\|_* \ge \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.10}$$

Za tím účelem zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, ale pevně, a rozložme interval $\langle a, b\rangle$ na podintervaly body $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tak, aby oscilace funkce $y_0(t)$ (tj. rozdíl mezi její největší a nejmenší hodnotou) na každém z intervalů $\langle t_k, t_{k+1}\rangle$ byla menší než ε. Rozdělme všechny podintervaly do dvou skupin: do první skupiny patří všechny takové intervaly $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_r'$, ve kterých funkce $y_0(t)$ nemění znaménko (tj. v každém je buď kladná, nebo záporná). Zbývající intervaly $\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots, \Delta_s''$. Protože funkce $y_0(t)$ mění v každém intervalu Δ_k'' $(k = 1, \ldots, s)$ znaménko, existuje v každém intervalu Δ_k'' alespoň jeden bod, ve kterém je funkce $y_0(t)$ rovna nule. Odtud a z toho, že oscilace funkce $y_0(t)$ je na každém z intervalů $\langle t_k, t_{k+1}\rangle$ menší než ε, plyne, že

$$|y_0(t)| < \varepsilon \quad (t \in \Delta_k'';\ k = 1, 2, \ldots, s). \tag{18.11}$$

Definujme nyní pomocnou funkci $\overline{x}(t) \in C^0\langle a, b\rangle$ takto: V intervalech první skupiny klademe

$$\overline{x}(t) = \operatorname{sgn} y_0(t) \quad (t \in \Delta'_j;\ j = 1, 2, \dots, r). \tag{18.12}$$

Na intervalech Δ''_k $(k = 1, 2, \dots, s)$ nechť je funkce $\overline{x}(t)$ lineární. Přitom, pokud je bod a (nebo b) koncem některého z intervalů Δ''_k, tak definujeme $\overline{x}(a) = 0$ (nebo $\overline{x}(b) = 0$).

Odhadneme nyní zdola hodnotu

$$f(\overline{x}) = \int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t.$$

Platí

$$\int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t. \tag{18.13}$$

Vzhledem k (18.12) platí

$$\int_{\Delta'_j} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\Delta'_j} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t. \tag{18.14}$$

Dále

$$\begin{aligned} \int_{\Delta''_k} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t &\geq -\int_{\Delta''_k} |\overline{x}(t)| \cdot |y_0(t)|\ \mathrm{d}t \geq \\ \geq -\max_{t\in\Delta''_k} |\overline{x}(t)| \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t &= -\int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{18.15}$$

Konečně

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t = \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t. \tag{18.16}$$

Z (18.11) a (18.13) – (18.16) plyne

$$\int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t \geq \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - 2\sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t > \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - 2\varepsilon(b-a).$$

Protože $\|\overline{x}\| = 1$, platí

$$\|f\|_* \geq \frac{|f(\overline{x})|}{\|\overline{x}\|} = f(\overline{x}) = \int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t > \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - 2\varepsilon(b-a). \tag{18.17}$$

Necháme-li v (18.17) konvergovat ε k nule, dostaneme hledanou nerovnost (18.10). Tedy vzhledem k opačné nerovnosti (18.8) pro normu $\|f\|_*$ funkcionálu f platí vztah (18.9).

18.15. Příklad. V prostoru l_2 můžeme definovat lineární funkcionál stejným způsobem jako jsme to udělali v euklidovském prostoru R_2^n: vybereme v l_2 nějaký pevný prvek $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ a položíme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n\,. \tag{18.18}$$

Řada (18.18) konverguje pro libovolný prvek $x \in l_2$:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} = \|x\| \cdot \|a\|\,. \tag{18.19}$$

V případě $x = a$ nerovnost (18.19) přechází v rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Odtud

$$\|f\|_* = \|a\|\,.$$

19. Adjungovaný prostor

V případě lineárních funkcionálů je možno definovat operaci sčítání funkcionálů a operaci násobení funkcionálu číslem stejným způsobem jako v případě funkcí n proměnných (viz Příklad 2.18); jediný rozdíl je v tom, že v Příkladě 2.18 byla jako definiční obor funkcí uvažována množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kdežto v případě lineárních funkcionálů je definičním oborem celý lineární, resp. normovaný prostor:

19.1. Definice. Nechť f_1 a f_2 jsou jsou dva spojité lineární funkcionály na některém normovaném prostoru $\mathcal{R}$ (ne nutně úplným). Jejich součtem nazýváme takový funkcionál $f = f_1 + f_2$, že

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}\,.$$

Součinem spojitého lineárního funkcionálu f_1 a čísla α se nazývá takový funkcionál $f = \alpha f_1$, že

$$f(x) = \alpha f_1(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}\,.$$

Je zřejmé, že součet $f_1 + f_2$ a součin αf_1 jsou spojité lineární funkcionály.

Snadno se ověří, že takto definované operace sčítání spojitých lineárních funkcionálů a jejich násobení číslem vyhovují všem axiomům lineárního prostoru. Kromě toho norma spojitého lineárního funkcionálu definovaná vztahem (18.6) vyhovuje všem požadavkům kladeným na normu v Definici 3.1. Skutečně,

1. $\|f\|_* > 0$ pro každý funkcionál $f \not\equiv 0$; $\|f\|_* = 0$, když a jen když $f \equiv 0$,
2. $\|\alpha f\|_* = |\alpha| \cdot \|f\|_*$,
3. $\|f_1 + f_2\|_* = \sup\limits_{x \neq \theta} \frac{|f_1(x)+f_2(x)|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x \neq \theta} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup\limits_{x \neq \theta} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\|_* + \|f_2\|_*\,.$

Tedy množina všech spojitých lineárních funkcionálů na nějakém normovaném prostoru $\mathcal{R}$ je sama normovaným prostorem. Tento prostor se nazývá *adjungovaný* k $\mathcal{R}$ a značí se $\mathcal{R}^*$.

19.2. Věta. *Adjungovaný prostor je vždy úplný.*

Důkaz. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost spojitých lineárních funkcionálů. Podle definice cauchyovské posloupnosti ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon) > 0$ tak, že $\|f_n - f_m\|_* < \varepsilon$ pro $n, m > N(\varepsilon)$. Potom pro libovolné $x \in \mathcal{R}$ $(x \neq \theta)$ podle Definice 18.6 a poznámky k ní

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_* \|x\| < \varepsilon \|x\|\,, \tag{*}$$

tj. (vzhledem k úplnosti číselné přímky $\mathbb{R}^1$) číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje pro libovolné $x \in \mathcal{R}$. Položme

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

dokážeme, že $f(x)$ je spojitý lineární funkcionál:

1. linearita: $f(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

2. Vraťme se k nerovnosti (*), tj.

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\| \tag{*}$$

a přejděme v ní k limitě pro $m \to \infty$. Protože absolutní hodnota je spojitá funkce, pro levou stranu platí podle Věty 12.2:

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |\lim_{m\to\infty} (f_n(x) - f_m(x))| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|.$$

Pravá strana na m nezávisí, takže dostáváme výsledek

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \|x\|. \tag{**}$$

Odtud plyne podle Definice 18.4, že pro každé n je lineární funkcionál $f - f_n$ ohraničený, takže je podle Věty 18.5 spojitý. Potom je však také spojitý lineární funkcionál $f = f_n + (f - f_n)$.

Podělme nerovnost (**) výrazem $\|x\|$, kde $\overline{x} \neq \theta$, a přejděme k supremu. Potom podle Definice 18.6 dostáváme:

$$\|f_n - f\|_* \leq \varepsilon.$$

To znamená, že $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_n - f\|_* = 0$ čili $f_n \to f$ v $\mathcal{R}^*$, takže každá cauchyovská posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{R}^*$ je v $\mathcal{R}^*$ konvergentní. $\square$

Zdůrazněme ještě jednou, že tato věta platí nezávisle na tom, je-li výchozí normovaný prostor $\mathcal{R}$ úplný nebo ne. Pro úplnost adjungovaného prostoru $\mathcal{R}^*$ je podstatná úplnost prostoru, ve kterém leží hodnoty spojitého lineárního funkcionálu f, tj. úplnost číselné přímky $\mathbb{R}^1$.

19.3. Příklad. Nechť E je n-rozměrný prostor s bází $e_1, e_2, \dots, e_n$. Potom pro funkcionál f platí

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i\,, \tag{19.2}$$

kde

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,, \quad f_i := f(e_i)\,.$$

Tedy funkcionál f je definován n čísly $f_1, \dots, f_n$, což jsou jeho hodnoty na bázových vektorech, takže prostor adjungovaný s n-rozměrným prostorem je také n-rozměrný.

Výraz pro normu v adjungovaném prostoru E^* závisí na tom, jak je definována norma v prostoru E.

a) Nechť $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. Podobně jako v Příkladu 18.8 lze dokázat, že

$$\|f\|_* = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2}\,,$$

tj. adjungovaný prostor k euklidovskému prostoru je také euklidovský.

b) Nechť $\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Potom

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) \|x\|\,.$$

Norma $\|f\|_*$ nemůže být menší než $\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$, protože položíme-li

$$x_i = \begin{cases} +1 & \text{v případě } f_i > 0, \\ -1 & \text{v případě } f_i < 0, \\ 0 & \text{v případě } f_i = 0, \end{cases}$$

bude platit

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) \|x\| \,.$$

c) Jestliže $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$, potom $\|f\|_* = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, přičemž

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,.$$

Plyne to z Hölderovy nerovnosti

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

a z toho, že při $x_i \geq 0$, $f_i = x_i^{p-1}$ nastává rovnost.

19.4. Příklad. Uvažujme prostor c_0 všech nulových posloupností $x = \{x_n\}$ (viz příklad 74.9) s normou

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n| \,.$$

Za chvíli dokážeme, že lineární funkcionál v prostoru c_0 je dán vztahem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| < \infty \,. \tag{19.3}$$

Odtud plyne

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \cdot |x_i| \leq \max_{1 \leq n \leq \infty} |x_n| \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \,.$$

Tedy

$$\|f\|_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \,. \tag{19.4}$$

Nyní dokážeme, že v (19.4) nastává znaménko rovnosti: Jestliže

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = a \,,$$

potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N = N(\varepsilon) > 0$, že

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i| > a - \varepsilon \,.$$

Položme nyní

$$x_n = \begin{cases} +1, & \text{jestliže } f_n > 0 \text{ a } n \le N, \\ -1, & \text{jestliže } f_n < 0 \text{ a } n \le N, \\ 0, & \text{jestliže } f_n = 0 \text{ a } n \le N, \\ 0, & \text{jestliže } n > N. \end{cases}$$

Potom

$$|f(x)| = \sum_{n=1}^{N} |f_n| > a - \varepsilon \,,$$

odkud plyne, že $\|f\|_* = a$.

Nyní dokážeme, že v prostoru c_0 mají všechny funkcionály tvar (19.3). Položme

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots),$$

tj. e_n označuje posloupnost, v které na n-tém místě stojí jednička a na ostatních místech nuly.

Nechť je zadán lineární funkcionál $f(x)$; jeho hodnotu $f(e_n)$ označíme f_n. Jestliže

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \tag{19.5}$$

potom

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \,.$$

Dokážeme, že pro každý lineární ohraničený funkcionál na c_0 platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$. Kdyby bylo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| = \infty$, potom ke každému H by bylo možné najít takové N, že

$$\sum_{n=1}^{N} |f_n| > H \,.$$

Sestrojme prvek x takto:

$$x_n = \begin{cases} +1, & \text{jestliže } f_n > 0 \text{ a } n \le N, \\ -1, & \text{jestliže } f_n < 0 \text{ a } n \le N, \\ 0, & \text{jestliže } f_n = 0 \text{ a } n \le N, \\ 0, & \text{jestliže } n > N. \end{cases}$$

Norma tohoto prvku je rovna jedné, takže

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i = \sum_{i=1}^{N} |f_i| > H = H\|x\| \,,$$

což je ve sporu s předpokladem o ohraničenosti funkcionálu $f(x)$.

Množina prvků tvaru (19.5) je všude hustá v prostoru c_0. Proto *lineární spojitý funkcionál je jednoznačně definován svými hodnotami na této množině.* Tedy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \,.$$

Tím jsme dokázali, že na prostoru c_0 všechny lineární funkcionály mají tvar (19.3).

Adjungovaný prostor k prostoru c_0 sestává z posloupností $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$, které splňují podmínku $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$.

19.5. Příklad. Nechť normovaný prostor sestává z posloupností

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

s normou $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Je možné dokázat, že adjungovaným prostorem je prostor ohraničených posloupností s normou $\|f\|_* = \sup\limits_{1 \le n \le \infty} |f_n|$.

Ve všech příkladech uvedených pro n-rozměrné prostory adjungovaný prostor byl (jako lineární prostor) totožný s původním. Jak ukazují příklady 19.4 a 19.5 v případě nekonečné dimenze tomu tak nemusí být. Uvedeme nyní příklad, kdy oba prostory jsou totožné v případě nekonečné dimenze.

19.6. Příklad. Prostor l_2 sestává z posloupností

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

a norma je v něm dána vztahem $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2}$. Dokážeme toto tvrzení: Funkcionály na prostoru l_2 mají tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \tag{19.6}$$

a pro jejich normu platí

$$\|f\|_* = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2} \,. \tag{19.7}$$

Každému funkcionálu je přiřazena posloupnost $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ jeho hodnot na prvcích $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ definovaných stejně jako v Příkladě 19.4.

Je-li funkcionál ohraničen, potom $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty$. Abychom to dokázali, předpokládejme opak, tj. předpokládejme, že ke každému H existuje takové N, že

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 = U \geq H.$$

Aplikujeme-li funkcionál (19.6) na prvek

$$x = (f_1, f_2, \ldots, f_N, 0, \ldots), \quad \|x\| = \sqrt{U},$$

dostaneme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = U \geq \sqrt{H}\|x\|\,,$$

což je ve sporu s ohraničeností funkcionálu.

Protože funkcionál f je lineární, snadno nalezneme jeho hodnoty na prvcích tvaru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$; na ostatních prvcích prostoru l_2 hodnoty f nalezneme ze spojitosti; dohromady dostaneme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i\,,$$

tj. platí (19.6). Výraz (19.7) pro normu se stanoví pomocí Schwarzovy nerovnosti.

19.7. Příklad. Prostor l_p, kde $p > 1$, je prostor posloupností

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Prostor adjungovaný k prostoru l_p je prostor l_q, kde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Důkaz je analogický předcházejícím důkazům. Užívá se při něm Hölderova nerovnost. V případě $p = 1$ je adjungovaným prostorem prostor M^{∞}.

20. Hahn – Banachova věta o prodloužení lineárních funkcionálů a věta o dostatečném počtu lineárních funkcionálů

77.1. Věta (Hahn-Banach). *Každý spojitý lineární funkcionál $f(x)$ definovaný na lineárním podprostoru G normovaného prostoru E lze prodloužit na celý prostor E se zachováním normy, tj. na E lze sestrojit takový spojitý lineární funkcionál $F(x)$, že*

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in G\,, \tag{20.1}$$

$$\|F\|_{*,E} = \|f\|_{*,G}\,. \tag{20.2}$$

Důkaz Hahn-Banachovy věty je dosti komplikovaný a lze jej nalézt např. v [Že1].

Závažným důsledkem Hahn–Banachovy věty je následující *věta o dostatečném počtu funkcionálů*, která zaručuje existenci spojitého lineárního funkcionálu, který je různý od nuly v předem daném prvku.

20.2. Věta (o dostatečném počtu funkcionálů). *Nechť $x_0 \neq \theta$ je libovolný prvek v normovaném prostoru $\mathcal{R}$ a $M > 0$ libovolné číslo. Potom na $\mathcal{R}$ existuje takový spojitý lineární funkcionál $f(x)$, že*

$$\|f\|_{*,\mathcal{R}} = M\,, \tag{20.3}$$

přičemž

$$f(x_0) = \|f\|_{*,\mathcal{R}}\|x_0\|\,. \tag{20.4}$$

20.2a. Poznámka. Někdy se Věta 20.2 formuluje takto: *Nechť $x_0 \neq \theta$ je libovolný prvek v normovaném prostoru $\mathcal{R}$. Potom na $\mathcal{R}$ existuje takový lineární funkcionál $f(x)$, že*

$$\|f\|_* = 1; \quad f(x_0) = \|x_0\|,$$

tj. na prvku x_0 se realizuje znak rovnosti v normativní nerovnosti pro funkcionál f: $|f(x)| \leq \|f\|_*\|x\|$.

Důkaz Věty 20.2. Položme

$$f(tx_0) = tM\|x_0\|\,, \quad t \in R^1\,. \tag{20.5}$$

Vztah (20.5) definuje lineární funkcionál na jednorozměrném podprostoru $X_1 = \{tx_0\colon\ t \in R^1\} \subset \mathcal{R}$. Protože

$$|f(tx_0)| = |t|M\|x_0\| = M\|tx_0\|, \quad t \in R^1\,,$$

platí

$$\|f\|_{*,X_1} = M\,. \tag{20.6}$$

Z (20.6) podle Hahn-Banachovy věty plyne (20.3). Položíme-li $t = 1$ v (20.5), dostaneme (20.4). $\square$

Geometrický význam Věty 20.2 je tento: V Banachově prostoru lze každým bodem x_0 vést nadrovinu, která je tečná k nadkouli $\|x\| = \|x_0\|$.

21. Druhý adjungovaný prostor

Protože množina $\mathcal{R}^*$ lineárních funkcionálů na nějakém normovaném prostoru $\mathcal{R}$ tvoří opět normovaný prostor, můžeme mluvit o prostoru $\mathcal{R}^{**}$ lineárních funkcionálů na $\mathcal{R}^*$, tj. o druhém adjungovaném prostoru k prostoru $\mathcal{R}$, atd. Především poznamenejme, že každý prvek z $\mathcal{R}$ definuje nějaký lineární funkcionál na $\mathcal{R}^*$. Skutečně, nechť

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0)\,,$$

kde $x_0 \in \mathcal{R}$ je nějaký pevný prvek a f probíhá celý adjungovaný prostor $\mathcal{R}^*$. Takovým způsobem je je každému $f \in \mathcal{R}^*$ přiřazeno nějaké číslo $\psi_{x_0}(f)$. Přitom

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x_0) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2)\,,$$

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\|_*\|x_0\|\,,$$

tj. $\psi_{x_0}(f)$ je ohraničený lineární funkcionál na $\mathcal{R}^*$.

Spolu se zápisem $f(x)$ budeme užívat symetričtější značení

$$\langle f, x \rangle \,, \tag{21.1}$$

které připomíná zápis skalárního součinu. Při pevném $f \in \mathcal{R}^*$ můžeme uvažovat tento výraz jako funkcionál na $\mathcal{R}$ a při pevném $x \in \mathcal{R}$ jako funkcionál na $\mathcal{R}^*$.

Odtud plyne, že pro každý prvek $x \in \mathcal{R}$ je norma definována dvěma způsoby: 1. jeho norma se definuje jako norma prvku z $\mathcal{R}$; 2. jeho norma se definuje jako norma lineárního funkcionálu na $\mathcal{R}^*$, tj. jako norma prvku z $\mathcal{R}^{**}$. Nechť $\|x\|$ označuje normu x jako prvku z $\mathcal{R}$ a $\|x\|_{**}$ normu x jako prvku z $\mathcal{R}^{**}$. Ukážeme, že platí

$$\|x\| = \|x\|_{**} \,. \tag{21.2}$$

Nechť $f \in \mathcal{R}^*$ je libovolný funkcionál. Potom

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_* \|x\| \,, \quad \|x\| \geq \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|_*};$$

protože levá strana poslední nerovnosti nezávisí na f, plyne odtud

$$\|x\| \geq \sup_{f \in \mathcal{R}^*} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|_*} = \|x\|_{**} \,. \tag{21.3}$$

Ale podle Věty 20.2 (o dostatečném počtu funkcionálů) lze ke každému prvku $x \in \mathcal{R}$ najít takový spojitý lineární funkcionál $f_0 \in \mathcal{R}^*$, že

$$|\langle f_0, x \rangle| = \|f_0\|_* \|x\| \,.$$

Odtud a z (21.3) plyne

$$\|x\|_{**} \equiv \sup_{f \in \mathcal{R}^*} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|_*} = \|x\| \,,$$

tj. platí vztah (21.2). Tím jsme dokázali tuto větu (co se týče pojmu *lineární varieta*, viz položku 11.5):

21.1. Věta. *Normovaný prostor $\mathcal{R}$ je izometrický s nějakou lineární varietou v $\mathcal{R}^{**}$.*

Protože jsme se dohodli nerozlišovat mezi sebou izometrické množiny, můžeme větu 21.1 také formulovat takto:

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{**} \,.$$

V tom případě, když $\mathcal{R}^{**} = \mathcal{R}$, budeme normovaný prostor $\mathcal{R}$ nazývat *reflexivní*. Jestliže $\mathcal{R}^{**} \neq \mathcal{R}$, potom $\mathcal{R}$ se nazývá *nereflexivní*.

Euklidovské prostory R^n s konečnou dimenzí n a prostor l_2 jsou příklady reflexivních prostorů (pro ně dokonce platí $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$).

Prostor c_0 všech posloupností konvergujících k nule je příkladem úplného nereflexivního prostoru. Jak plyne z příkladu 19.4 adjungovaným prostorem k prostoru c_0 je prostor l_1 všech takových posloupností $\{f_n\}$, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$; k němu je zase adjungován prostor M^∞ všech ohraničených posloupností.

Prostor $C^0\langle a, b\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ je také nereflexivní. Důkaz tohoto tvrzení neuvádíme.[1]

Příkladem reflexivního prostoru, který není totožný s prostorem k němu adjungovaným, je prostor l_p pro $1 < p \neq 2$: protože $l_p^* = l_q$, kde $1/p + 1/q = 1$, je $l_p^{**} = l_q^* = l_p$.

Dá se dokázat toto tvrzení: buď je normovaný prostor reflexivní, tj.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{**} = \mathcal{R}^{****} = \dots,$$

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^{***} = \dots,$$

nebo jsou všechny prostory $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{R}^{**}$, ... různé. (Případ "buď" nevylučuje, že $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* = \mathcal{R}^{**} = \dots$, tj, že všechny prostory $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{R}^{**}$, ... jsou stejné.)

[1]Lze dokázat dokonce toto silnější tvrzení: Neexistuje *žádný* normovaný prostor, pro nějž by prostor $C^0\langle a, b\rangle$ byl adjungovaným prostorem.

Začneme zopakováním pojmu *funkce jedné proměnné spojité v bodě* (je to speciální případ Definice 12.1 spojitého zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ z metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ do metrického prostoru $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$, kde $X = Y = \mathbb{R}^1$ a $\varrho(x, y) = \varrho^*(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^1$):

22.1. Definice. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže je definovaná v nějakém otevřeném intervalu I, který obsahuje bod x_0, a jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (závislé na ε) takové, že pro všechna

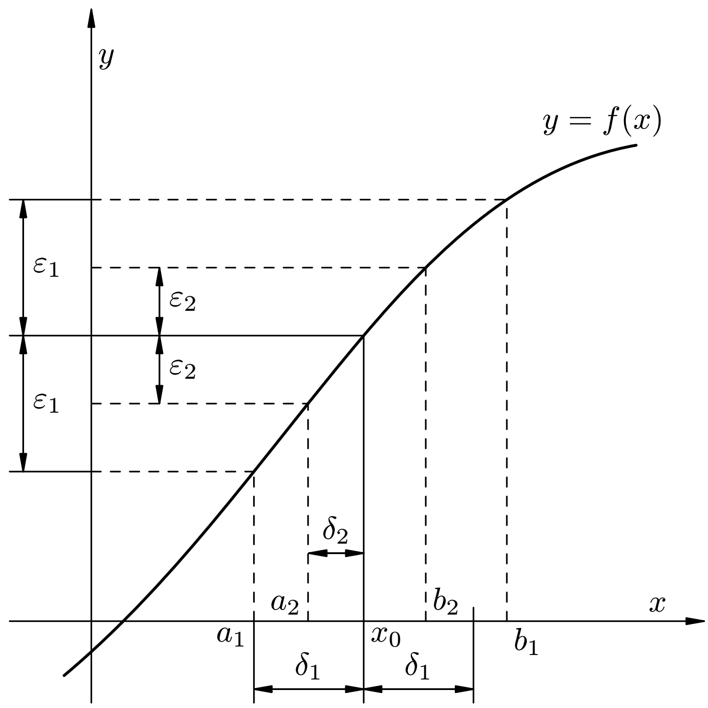
$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I \tag{22.1}$$

platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{22.2}$$

Pokud je funkce $f(x)$ spojitá ve všech bodech intervalu I, říkáme, že je spojitá na intervalu I.

Díváme-li se na obrázek funkce, která je spojitá na intervalu (jak je tomu na Obr. 22.1), myslíme, že je vše jasné. V 22.3 a 22.4 uvedeme dvě dosti potrhané funkce a budeme zkoumat jejich spojitost. Ty funkce si ani pořádně neumíme nakreslit. Dříve však ještě v 22.2 zobecníme Definici 22.1 na případ, že daná funkce není definována ve všech bodech intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (Toto zobecnění nebude použito v 22.3 a 22.4.)



Obr. 22.1. K definici spojité funkce

22.2. Poznámka. Někdy funkce není definována ve všech bodech intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom vztah (22.1) píšeme obecněji:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M, \tag{22.1*}$$

kde M je množina bodů osy x, ve kterých je funkce $f(x)$ definována a $x_0 \in M$. Uveďme čtyři příklady:

a) Nechť $M = \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$, přičemž $f(x) = -1$ pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$ a $f(x) = 1$ pro $x \in \langle 1, 2 \rangle$. Tato funkce $f(x)$ je spojitá na množině M.

b) Nechť $M = \langle -1, 0) \cup (0, 2 \rangle$ (tj. $M = \langle -1, 2 \rangle \setminus \{0\}$), přičemž $f(x) = -1$ pro $x \in \langle -1, 0)$ a $f(x) = 1$ pro $x \in (0, 2 \rangle$. Tato funkce $f(x)$ je spojitá na množině M. (Je nutné si uvědomit, že každý bod $x_0 \in M$ ležící v ε-okolí bodu $x = 0$, kde $0 < \varepsilon < 1$, je vnitřním bodem množiny M.)

c) Nechť $M = \langle -1, 2 \rangle$, přičemž $f(x) = -1$ pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$ a $f(x) = 1$ pro $x \in (0, 2 \rangle$. Tato funkce je nespojitá v bodě $x = 0$.

d) Nechť $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ a nechť funkce $f(j)$ $(j = -1, 0, 1, 2)$ nabývá v bodech $x = j$ libovolných pevných konečných hodnot. Tato funkce je spojitá na množině M. (Abychom to dokázali, zvolme libovolně $0 < \delta < 1$. Potom $(j - \delta, j + \delta) \cap M = \{j\}$, takže nerovnost (22.2), kde $x_0 = j$, je splněna pro všechny body ležící v $(j - \delta, j + \delta) \cap M$ – je to jednobodová množina.)

22.3. Definice Dirichletovy funkce. Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ definujeme

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ 1 & \text{pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$$

22.4. Definice Riemannovy funkce. Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ definujeme

$$f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}, \quad p,\ q \text{ nesoudělná.} \end{cases}$$

Dirichletova funkce je fádní, ale nenakreslitelná, protože racionálních bodů je v každém intervalu nekonečně (i když spočetně) mnoho.

Co se týče Riemannovy funkce, je také nenakreslitelná, její průběh je však o mnoho zajímavější, takže stojí za to tuto funkci vyhodnotit alespoň v některých bodech (viz také Obr. 22.2)

$$f_R(0) = f_R(1) = 1,$$

$$f_R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f_R\left(\frac{1}{3}\right) = f_R\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$f_R\left(\frac{1}{4}\right) = f_R\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$f_R\left(\frac{1}{5}\right) = f_R\left(\frac{2}{5}\right) = f_R\left(\frac{3}{5}\right) = f_R\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5},$$

$$f_R\left(\frac{1}{6}\right) = f_R\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6},$$

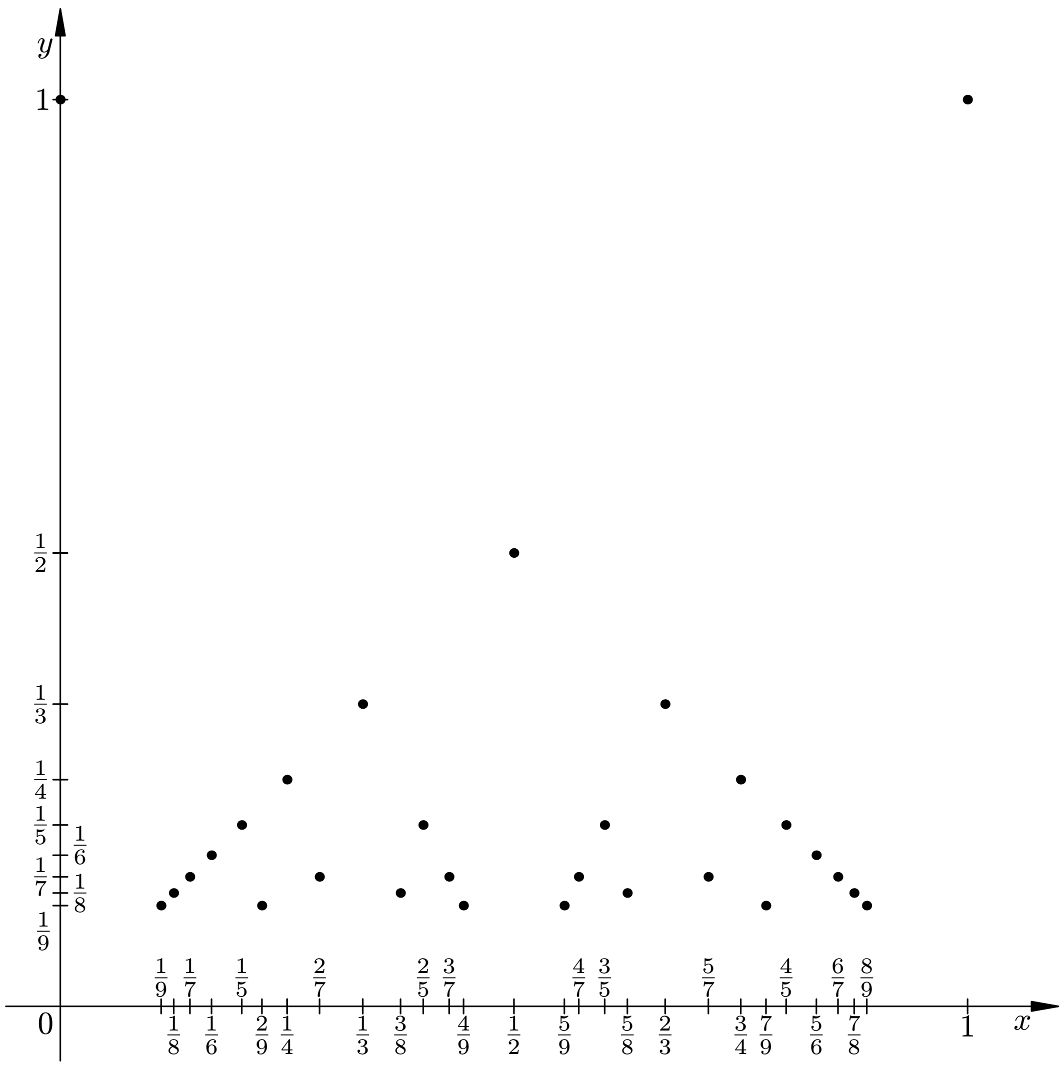
$$f_R\left(\frac{1}{7}\right) = f_R\left(\frac{2}{7}\right) = f_R\left(\frac{3}{7}\right) = f_R\left(\frac{3}{7}\right) = f_R\left(\frac{4}{7}\right) =$$
$$= f_R\left(\frac{5}{7}\right) = f_R\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{1}{7},$$

$$f_R\left(\frac{1}{8}\right) = f_R\left(\frac{3}{8}\right) = f_R\left(\frac{5}{8}\right) = f_R\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}\,,$$

$$f_R\left(\frac{1}{9}\right) = f_R\left(\frac{2}{9}\right) = f_R\left(\frac{4}{9}\right) = f_R\left(\frac{5}{9}\right) =$$

$$= f_R\left(\frac{7}{9}\right) = f_R\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{1}{9}\,,$$

atd. (Můžeme si představit, že "graf" Dirichletovy funkce je obrázek nějakého nepoužitého ideálního kartáčku na zuby, kdežto "graf" Riemanovy funkce je obrázek podobného, ale už velmi používaného a tedy vydřeného ideálního kartáčku na zuby.) Přikročíme ke zkoumání spojitosti obou funkcí.



Obr. 22.2. Riemannova funkce

22.5. Věta. *Dirichletova funkce $f_D(x)$ je nespojitá ve všech bodech, kdežto Riemannova funkce $f_R(x)$ je spojitá v iracionálních bodech – body nespojitosti má pouze v racionálních bodech.*

Důkaz. a) Případ funkce $f_D(x)$: Zvolme $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ a $0 < \varepsilon < 1$ libovolně, ale pevně. Ať je $\delta > 0$ sebemenší, vždy jsou v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ jak racionální, tak iracionální body, takže nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ není splněna pro všechny body tohoto intervalu.

b) Případ funkce $f_R(x)$: Zvolme iracionální $x_0 \in \langle 0,1\rangle$ a $\varepsilon > 0$ libovolně, ale pevně. Existuje jenom *konečný* počet přirozených čísel q, která nepřevyšují svou hodnotou číslo $\frac{1}{\varepsilon}$, z čehož plyne, že v uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$ existuje pouze konečný počet racionálních čísel $\frac{p}{q}$, pro která $f_R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$. To znamená, že existuje tak malé $\delta > 0$, že v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ neleží žádný z těchto bodů $\frac{p}{q}$ (je jich přece konečný počet). Tedy

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x) < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čímž je spojitost funkce $f_R(x)$ v iracionálních bodech dokázána.

Nechť nyní $x_0 \in \langle 0,1\rangle$ je racionální. Zvolme $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Ať je $\delta > 0$ sebemenší, vždy jsou v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ jak racionální, tak iracionální body, takže nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ není splněna pro všechny body tohoto intervalu, což dokazuje nespojitost funkce $f_R(x)$ v racionálních bodech. $\square$

Je třeba zdůraznit, že obě funkce $f_D(x)$ a $f_R(x)$ jsou potrhané ve stejných bodech. Přitom první je všude nespojitá, kdežto druhá téměř všude spojitá (tento pojem bude precizován později).

Přejdeme k nám již známé definici Riemannova integrálu:

22.6. Definice Riemannova integrálu. Číslo

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{nebo stručněji} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

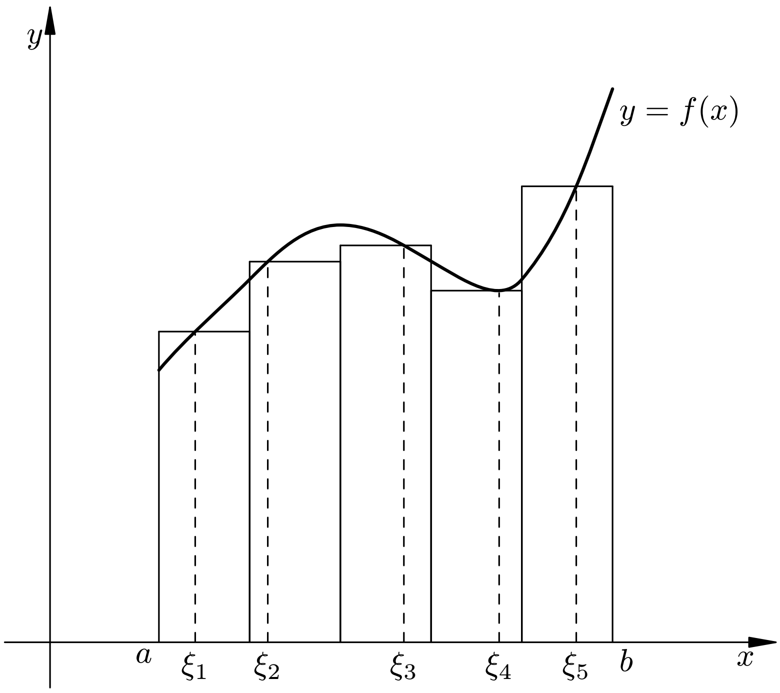
nazýváme *Riemannovým integrálem* funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $N(\varepsilon)$ tak, že pro $n \geq N(\varepsilon)$ platí

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{22.3}$$

nezávisle na tom, jak volíme čísla $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, \dots, n)$, kde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{22.4}$$

jsou ekvidistantní body, které dělí uzavřený interval $\langle a,b\rangle$ na n stejně velkých dílků délky $(b-a)/n$. $\square$



Obr. 22.3. K definici Riemannova integrálu

V případě nezáporné spojité funkce $f(x)$ vyjadřuje součin $\frac{b-a}{n} f(\xi_i)$ plochu obdélníka o délce základny $\frac{b-a}{n}$ a výšce $f(\xi_i)$ a výraz $\frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)$ přibližný plošný obsah dvojrozměrné jednoduše souvislé množiny U ohraničené segmentem $\langle a, b\rangle$, dvěma svislými úsečkami o délkách $f(a)$, $f(b)$ a grafem funkce $f(x)$ (viz Obr. 22.3). Vzhledem k libovolnosti ε pak plyne geometrický význam Riemannova integrálu $(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ze spojité nezáporné funkce $f(x)$: Je to plošný obsah množiny U.

Pomocí Definice 22.6 se Riemannovy integrály nepočítají; na jejím základě bylo vyvinuto mnoho rafinovaných výpočetních metod – my však tuto definici probereme na dvou příkladech.

22.7. Příklad. Vypočtěte Riemannův integrál z funkce $f(x) = kx$ $(k > 0)$ přes interval $\langle a, b\rangle$.

Definujme dva součty

$$s(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} kx_i, \quad S(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} kx_j.$$

Zřejmě platí

$$s(f) < \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k\xi_i < S(f).$$

Dokážeme nyní, že

$$\int_a^b kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[s(f) + S(f)]\,.$$

Je totiž
$$\frac{1}{2}[s(f)+S(f)]=\sum_{i=1}^{n}P_i\,,$$
kde P_i je plocha lichoběžníku o základně $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ a s rameny kx_{i-1}, kx_i, takže
$$P_i=\frac{1}{2}k(x_{i-1}+x_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}k(x_{i-1}+x_i),$$
přičemž $\sum_{i=1}^{n}P_i$ je plocha lichoběžníka o základně $b-a$ a s rameny ka, kb. Nyní je zřejmé, že ke každému $\varepsilon>0$ lze najít $N(\varepsilon)$ tak, že
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}f(\xi_i)-P_i\right)\right|<\varepsilon,\quad n\geq N(\varepsilon),$$
protože $\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$ je plocha obdélníku o stejné základně jako lichoběžník P_i a výšce $f(\xi_i)$. Tedy platí
$$\int_a^b kx\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}P_i=\frac{1}{2}k(a+b)(b-a)=\frac{1}{2}k(b^2-a^2).$$
Obvyklými metodami integrálního počtu dostaneme stejný výsledek:
$$\int_a^b kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}k(b^2-a^2).$$

22.8. Příklad. Dokážeme, že Riemannův integrál z Dirichletovy funkce $f_D(x)$ neexistuje. Pokud zvolíme všechna ξ_i $(i=1,\ldots,n)$ racionální, platí
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_D(\xi_i)=1\,.$$
Pokud zvolíme všechna ξ_i $(i=1,\ldots,n)$ iracionální, platí
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_D(\xi_i)=0\,.$$
Pokud budou některá ξ_i iracionální a některá racionální, budeme mít
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_D(\xi_i)=\frac{k}{n}\,,$$
kde $0<k<n$ je celé číslo. Vidíme tedy, že Definici 22.6 nelze splnit.

V Příkladu 22.8 jsme viděli, že aparát Riemannova integrálu není dostatečný; selhal zde v případě celkem fádní funkce. Je to jeden z mnoha příkladů podporujících tvrzení, že matematická analýza potřebuje integrál obecnější, než je integrál ve smyslu Riemannově.

Lebesgue se inspiroval při svých matematických objevech nejprostšími názornými poznatky, které nám dává přímé pozorování skutečnosti. Lebesgueův kritický duch odstraňoval každý nepodstatný prvek, i když tento prvek již vešel natolik do běžné praxe, že se už nikdo neptal po jeho účelu.

Jak již jsme viděli, hlavní roli v procesu riemannovského integrování mají dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, v němž je definována funkce $f(x)$, na konečný počet dílků. Tedy body z $\langle a, b\rangle$ jsou zde roztříděny do konečného počtu podintervalů podle svého pořadí zleva doprava na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Lebesgue zjistil, že toto uspořádání zleva doprava (tj. uspřádání podle velikosti prvních souřadnic bodů $[x, f(x)]$ grafu funkce $f(x)$) je výsledkem rutiny, že *nevyplývá z podstaty problému integrování.* Použití tohoto uspořádání je dokonce i nepraktické, tak jak je nepraktické počítání obnosu peněz podle prvního způsobu v následujícím příkladě, který nemá s integrálem nic společného.

Představme si, že kromě osmi mincí (desetihaléře, dvacetihaléře, padesátihaléře, koruny, dvoukoruny, pětikoruny, desetikoruny, dvacetikoruny) máme ještě čtyři různé stříbrné mince (padesátikorunu, stokorunu, dvousetkorunu a pětisetkorunu) a tři zlaté mince (tisícikorunu, dvoutisícikorunu a pětitisícikorunu) – tedy celkem patnáct různých typů – a že máme několikakilogramový váček (či spíše vak) těchto mincí. Náš úkol by byl stanovit přesně peněžní částku v tomto vaku. Jsou možné dva způsoby:

1. Vytahovat z vaku jednu minci po druhé a postupně sečítat (trochu ekonomičtější, ale téměř stejně nešikovné by bylo mince vysypat na stůl a postupně odebírat).

2. Vysypat mince na stůl a rozdělit je do patnácti hromádek – v každé by byly mince pouze jednoho druhu. V každé hromádce bychom mince sečetli a jejich počet vynásobili hodnotou mince; součet patnácti dílčích výsledků pak by dalo hledaný výsledek.

Riemannovská integrace připomíná první způsob. Zde hodnoty

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$$

jsou také postupně "odebírány" v náhodném pořadí (ta náhodnost je dána tvarem grafu funkce $f(x)$).

Příklad se dvěma způsoby sčítání hodnot mincí vymyslel Lebesgue, aby názorně ukázal cestu pro jiný způsob integrace: Roztřídění mincí podle jejich hodnot nás přivádí na myšlenku uspořádat body z $\langle a, b\rangle$ podle jim odpovídajících hodnot funkce $f(x)$, což vede k tomuto důsledku: nedělit na dílky segment $\langle a, b\rangle$, který leží na ose x, ale segment $\langle A, B\rangle$ na ose y, kde čísla A, B jsou v případě ohraničené funkce $f(x)$ libovolně zvolená čísla splňujíci nerovnosti[1]

$$A < f(x) < B. \tag{22.1}$$

Segment $\langle A, B\rangle$ rozdělíme body

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_i < y_{i+1} < \dots < y_n = B$$

[1] Konstrukce Lebesgueova integrálu na číslech A, B nezávisí, tato čísla musejí jenom splňovat nerovnosti (22.1).

na konečný počet dílků a přiřadíme tomuto dělení konečnou posloupnost n množin

$$e_0,\, e_1,\, e_2, \dots, e_i,\, e_{i+1}, \dots, e_{n-1}$$

kde množina e_i $(i = 0, \dots, n-1)$ obsahuje právě všechny body $x \in \langle a, b\rangle$, pro něž platí $y_i \leq f(x) < y_{i+1}$.

Množiny e_i $(0 \leq i \leq n-1)$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je právě interval $\langle a, b\rangle$, takže definují rozklad intervalu $\langle a, b\rangle$. Avšak tak jako počítání peněz se stane praktičtější, když obětujeme něco z elementárního charakteru operací, podobně pozorujeme, že při uvedeném postupu je povaha množin e_i složitější než dílky v případě riemannovské integrace; množiny e_i jsou tím složitější, čím složitější je funkce $f(x)$ (viz Obr. 23.1, kde je na ose x zobrazena množina e_1, která sestává ze čtyř podmnožin).

Lebesgue si uvědomil – a to je druhá velká myšlenka, kterou zavedl do teorie integrálu – že teorii integrálu musí předcházet obecná teorie míry množin, teorie, která má nás naučit dát pravý smysl pojmu míry pro co nejobecnější množiny.

Je samozřejmé, že takováto obecná teorie míry bude muset splňovat určité logické a intuitivní požadavky. Například: Musí přiřazovat intervalům a mnohoúhelníkovým i mnohostěnným oblastem tutéž míru, kterou jim přiřazuje elementární matematika; je-li dán rozklad měřitelné množiny A na konečný nebo *spočetný* počet disjunktních množin A_i, které jsou všechny měřitelné, musí být míra množiny A rovna součtu měr množin A_i (vlastnost aditivity).

Dříve než se dotkneme v kap. 24 otázek souvisejících s mírou množin na přímce, popíšeme stručně v kap. 23 konstrukci Lebesgueova integrálu ohraničené funkce na libovolné ohraničené měřitelné množině E. Vyjdeme z premisy (kterou v kap. 24 dokážeme), že každé ohraničené množině E je přiřazeno číslo $\operatorname{meas} E$, míra množiny E.[2]

Na závěr této motivační kapitoly uveďme význam lebesgueovských množin e_i (kvůli kterým je nutno vybudovat lebesgueovskou teorii míry množin): definujeme pomocí rozkladu intervalu $\langle a, b\rangle$ tzv. *dolní* a *horní* Lebesgueův součet $s(f)$ a $S(f)$ vztahy

$$s(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \operatorname{meas} e_k, \quad S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \operatorname{meas} e_k\,.$$

V kap. 23 dokážeme, že dolní součty mají supremum U a horní součty infimum V a že platí

$$U = V.$$

Tuto společnou hodnotu nazveme *Lebesgueovým integrálem* přes interval $\langle a, b\rangle$.

23. Měřitelné funkce. Lebesgueův integrál z ohraničené funkce

23.1. Definice měřitelné funkce. Funkce $f(x)$ zadaná na množině E se nazývá *měřitelnou*, je-li měřitelná tato množina a jestliže pro libovolné a je měřitelná množina

$$\{x \in E : f(x) > a\}\,.$$

[2] Přesněji řečeno, každé množině E, která není zkonstruována pomocí *axiomu výběru*, protože Vitali dokázal s pomocí tohoto axiomu zkonstruovat (nepředstavitelnou) lebesgueovsky neměřitelnou množinu.

23.2. Věta. *Je-li $f(x)$ funkce měřitelná na množině E, potom při libovolném a jsou měřitelné množiny*

$$\{x \in E : f(x) \geq a\}, \quad \{x \in E : f(x) = a\},$$

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}, \quad \{x \in E : f(x) < a\}\,.$$

Nyní můžeme přikročit k **definici Lebesgueova integrálu** ohraničené měřitelné funkce:

Nechť na měřitelné množině E je dána *měřitelná ohraničená* funkce $f(x)$, přičemž

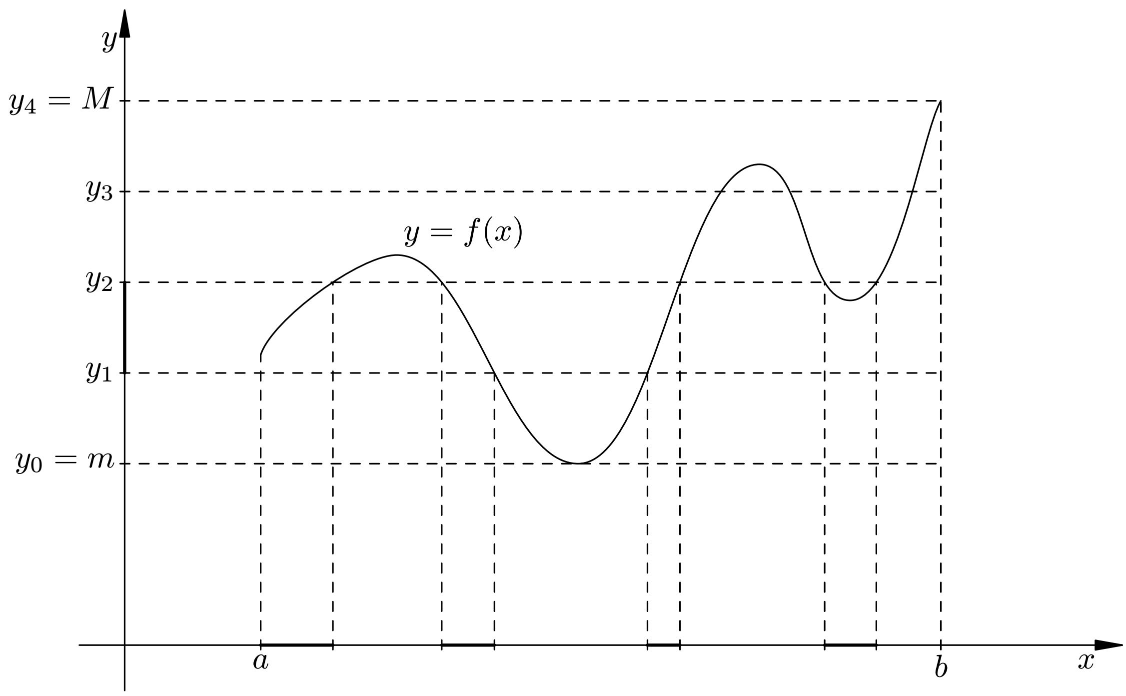
$$A < f(x) < B\,.$$

Rozdělme uzavřený interval $\langle A, B\rangle$ na části pomocí bodů

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = B \tag{23.1}$$

a přiřaďme každému polozavřenému intervalu $\big\langle y_k, y_{k+1}\big)$ tzv. *Lebesgueovu množinu* (viz Obr. 23.1)

$$e_k = \{x \in E : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,.$$



Obr. 23.1. K definici Lebesgueových množin

Na Obr. 23.1 je vyznačena na x-ové ose lebesgueovská množina $e_1 = \{x \in (a, b) : y_1 \leq f(x) < y_2\}$. Ostatní lebesguovské množiny, jejichž sjednocení spolu s e_1 dají celý interval (a, b), se zkonstruují podobně.

Snadno se prověří tyto čtyři vlastnosti Lebesgueových množin e_k:
1) množiny e_k jsou navzájem disjunktní: $e_i \cap e_j = \emptyset \quad (i \neq j)$;
2) množiny e_k jsou měřitelné;[3]
3) $E = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_k$;
4) $\operatorname{meas} E = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \operatorname{meas} e_k$.

Definujme dolní a horní Lebesgueův součet s a S:

$$s(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \operatorname{meas} e_k, \quad S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \operatorname{meas} e_k .$$

Položíme-li

$$\lambda = \max(y_{k+1} - y_k),$$

bude platit

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq \lambda \operatorname{meas} E . \tag{23.2}$$

23.3. Lemma. *Žádný dolní Lebesgueův součet $s(f)$ není větší než libovolný horní Lebesgueův součet.*

Důkaz. A) Nejprve dokážeme, že *přidáním dalších bodů dělení intervalu $\langle A, B\rangle$ se dolní součet nezmenší a horní součet nezvětší.*

Předpokládejme, že máme dělení segmentu $\langle A, B\rangle$ definované body

$$y_0 < y_1 < \cdots < y_n$$

kterému odpovídá dolní součet s_0 a horní součet S_0, a že jsme přidali bod $\overline{y}$, pro který platí

$$y_i < \overline{y} < y_{i+1}. \tag{*}$$

Potom při $k \neq i$ vystupují intervaly $\langle y_k, y_{k+1})$ a s nimi i množiny e_k i v novém způsobu dělení. Pouze interval $\langle y_i, y_{i+1})$ se rozpadá na dva intervaly

$$\langle y_i, \overline{y}), \quad \langle \overline{y}, y_{i+1}) .$$

Spolu s tím se množina e_i rozkládá na dvě množiny

$$e_i^1 = \{x \in \langle a, b\rangle : y_i \leq f(x) < \overline{y}\}, \quad e_i^2 = \{x \in \langle a, b\rangle : \overline{y} \leq f(x) < y_{i+1}\} .$$

Zřejmě platí

$$e_i = e_i^1 \cup e_i^2, \quad e_i^1 \cap e_i^2 = \emptyset ,$$

takže

$$\operatorname{meas} e_i = \operatorname{meas} e_i^1 + \operatorname{meas} e_i^2 . \tag{**}$$

Z dosud řečeného je jasné, že nový dolní součet s se získá ze součtu s_0 záměnou sčítance $y_i \operatorname{meas} e_i$ výrazem $y_i \operatorname{meas} e_i^1 + \overline{y} \operatorname{meas} e_i^2$. Tato skutečnost spolu se vztahy (*), (**) implikuje $s \geq s_0$.

Pro horní součty probíhá důkaz analogicky.

B) Uvažujme jakékoliv dva způsoby dělení D_1, D_2 segmentu $\langle A, B\rangle$. Nechť těmto způsobům korespondují dolní součty s_1, s_2 a horní součty S_1, S_2.

[3] Toto plyne z Věty 23.2 a vztahu $e_k = \{x \in \{x \in E : y_k \leq f(x)\} : f(x) < y_{k+1}\}$.

Utvořme třetí způsob dělení segmentu $\langle A, B\rangle$ – způsob D_3, ve kterém body dělení jsou tvořeny jak body dělení D_1, tak body dělení D_2. Jestliže způsobu D_3 korespondují součty s_3, S_3, potom v důsledku části A tohoto důkazu platí $s_1 \leq s_3$ a $S_3 \leq S_2$. Protože $s_3 \leq S_3$, je jasné, že $s_1 \leq S_2$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Zvolme nějaký určitý horní Lebesgueův součet $S_0(f)$. Protože pro každý dolní Lebesgueův součet $s(f)$ bude podle Lemmatu 23.3

$$s(f) \leq S_0(f)\,,$$

vidíme, že množina $\{s(f)\}$ všech Lebesgueových dolních součtů je ohraničená shora. Nechť U je její supremum,

$$U = \sup\{s(f)\}\,.$$

Potom je jasné, že

$$U \leq S_0(f)\,.$$

Vzhledem k libovolnosti součtu $S_0(f)$ poslední nerovnost dokazuje, že množina $\{S(f)\}$ všech horních Lebesgueových součtů je ohraničená zdola. Nazveme V její infimum,

$$V = \inf\{S(f)\}\,.$$

Zřejmě při libovolném způsobu dělení bude

$$s(f) \leq U \leq V \leq S(f)\,.$$

Podle (23.2) odtud máme

$$0 \leq V - U \leq \lambda \operatorname{meas} E\,,$$

a protože je λ libovolně malé, tak

$$U = V\,.$$

23.4. Definice Lebesgueova integrálu. Společnou hodnotu čísel $U = \sup\{s\}$, $V = \inf\{S\}$ nazýváme *Lebesgueovým integrálem* ohraničené měřitelné funkce $f(x)$ na množině E a značíme symbolem

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V těch případech, kdy je vyloučena záměna s jinými druhy integrálu, píšeme prostě

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V případě, že $E = \langle a, b\rangle$, píšeme

$$(L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

23.5. Příklad. Vypočtěme Lebesgueův integrál

$$(L)\int_0^1 f_D(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nechť $Q_{01} \subset \langle 0,1\rangle$ značí množinu racionálních čísel. Zvolme libovolně dělení (23.1) a nechť m je takové, že $y_m \le 1 < y_{m+1}$. Dále nechť r je takové, že $y_r \le 0 < y_{r+1}$. Podle definice pro příslušný dolní a horní Lebesgueův součet s a S a toho, že $\operatorname{meas} Q_{01}$ (bude to dokázáno v Příkladu 24.14) platí

$$s(f_D) = y_m \cdot \operatorname{meas} Q = 0\,, \quad S(f_D) = y_{m+1} \cdot \operatorname{meas} Q = 0\,,$$

takže z libovolnosti dělení (23.1) plyne

$$(L)\int_0^1 f_D(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Následujícími dvěma větami vyvrcholila klasická analýza na přelomu 19. a 20. století:

23.6. Věta (Lebesgue). *Aby ohraničená funkce byla integrovatelná (R), je nutné a stačí, aby byla téměř všude spojitá.*

Z Vět 23.6 a 22.5 plyne, že Riemannova funkce $f_R(x)$ je riemannovsky integrovatelná. Její integrál na segmentu $\langle 0,1\rangle$ vypočítáme pomocí Věty 23.7 v Příkladu 28.3.

23.7. Věta (Lebesgue). *Každá funkce integrovatelná (R) je nutně integrovatelná i (L) a oba integrály si jsou rovny.*

Věta obrácená k Větě 23.7 však neplatí – viz Příklady 22.8 a 23.5 o integrálech Dirichletovy funkce.

24. Teorie lebesgueovské míry množin na přímce

24.1. Struktura otevřených ohraničených množin. *Každá neprázdná ohraničená otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^1$ je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních otevřených intervalů, jejichž koncové body nenáležejí množině G (tyto otevřené intervaly nazýváme vytvořujícími intervaly).*

24.2. Struktura uzavřených ohraničenÓých množin. *Každá neprázdná ohraničená uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}^1$ je buď uzavřený interval nebo se získá z nějakého uzavřeného intervalu odebráním konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních otevřených intervalů, jejichž koncové body náležejí množině F.*

Druhá část následující Definice 24.3 vychází přímo z Věty 24.1 (je přirozené definovat míru otevřené množiny jako součet délek jejích vytvořujících intervalů).

24.3. Definice míry otevřené ohraničené množiny. a) Mírou intervalu (a, b), kde $a < b$, se nazývá jeho délka, tj. $b - a$. Toto číslo se značí

$$\operatorname{meas}(a, b) = b - a\,.$$

b) Mírou $\operatorname{meas} G$ neprázdné otevřené ohraničené množiny $G \subset \mathbb{R}^1$ nazýváme součet délek všech jejích vytvořujících intervalů I_k:

$$\operatorname{meas} G = \sum_k \operatorname{meas} I_k\,. \quad \square$$

Výraz $\operatorname{meas} G$ je vždy konečný ($0 \leq \operatorname{meas} G < \infty$), protože v případě spočetně mnoha sčítanců jde o případ absolutně konvergentní číselné řady.

24.4. Definice míry uzavřené ohraničené množiny. Mírou $\operatorname{meas} F$ neprázdné uzavřené ohraničené množiny $F \subset \mathbb{R}^1$ nazýváme číslo

$$\operatorname{meas} F = b - a - \operatorname{meas}(C_S F)\,,$$

kde $S = \langle a, b \rangle$ je nejmenší uzavřený interval obsahující množinu F a $C_S F$ je komplement množiny F do S, tj. $C_S F = S \setminus F$. ($C_S F$ je otevřená množina.)

24.5. Poznámka. Je-li F uzavřený interval, potom $C_S F = \emptyset$. Protože v teorii množin je prázdná množina současně otevřená a uzavřená a protože $\operatorname{meas} \emptyset = 0$, je Definice 24.4 v pořádku i v případě, že množina F je uzavřený interval, tj. $\operatorname{meas} F = b - a$.

Pro vybudování obecné teorie Lebesgueovy míry mají velký význam tyto dvě věty:

24.6. Věta. *Míra otevřené ohraničené množiny G je supremum měr všech možných uzavřených množin, které jsou obsaženy v G.*

24.7. Věta. *Míra uzavřené ohraničené množiny F je infimum měr všech možných otevřených množin, které obsahují F.*

Tyto dvě věty jsou motivací pro následující dvě definice:

24.8. Definice vnější míry. Vnější mírou $\mathrm{m}^* E$ ohraničené množiny E nazýváme infimum měr všech možných otevřených ohraničených množin, které obsahují množinu E:

$$\mathrm{m}^* E = \inf_{G \supset E} \{\operatorname{meas} G\}\,.$$

24.9. Definice vnitřní míry. Vnitřní mírou $\mathrm{m}_* E$ ohraničené množiny E nazýváme supremum měr všech možných uzavřených ohraničených množin, které jsou obsaženy v množině E:

$$\mathrm{m}_* E = \sup_{F \subset E} \{\operatorname{meas} F\}\,.$$

Protože se dá dokázat, že platí

a) *Míra otevřené ohraničené množiny G je infimum měr všech možných otevřených ohraničených množin, které obsahují G,*

b) *Míra uzavřené ohraničené množiny F je supremum měr všech možných uzavřených ohraničených množin, které jsou obsaženy v F,*

z Vět 24.6, 24.7 a Definic 24.8, 24.9 plyne:

24.10. Věta. *Je-li* G *otevřená ohraničená množina, potom*

$$\mathrm{m}^* G = \mathrm{m}_* G = \operatorname{meas} G,$$

kde $\operatorname{meas} G$ *je definována v* 24.3. *Je-li* F *uzavřená ohraničená množina, potom*

$$\mathrm{m}^* F = \mathrm{m}_* F = \operatorname{meas} F,$$

kde $\operatorname{meas} F$ *je definována v* 24.4.

Vzhledem k výsledku obsaženém ve Větě 24.10 má smysl zobecnit definici míry ohraničených otevřených a uzavřených množin na případ míry libovolné ohraničené množiny v $\mathbb{R}^1$ takto:

24.11. Definice míry. Ohraničená množina E se nazývá *měřitelnou* ve smyslu Lebesguea, jsou-li si vnitřní a vnější míra navzájem rovny. Jejich společnou hodnotu nazýváme mírou množiny E a značíme $\operatorname{meas} E$:

$$\operatorname{meas} E = \mathrm{m}^* E = \mathrm{m}_* E\,.$$

24.12. Věta (totální aditivnost míry). *Je-li ohraničená množina* E *sjednocením konečného počtu nebo spočetné množiny měřitelných množin, které jsou navzájem disjunktní,*

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j),$$

potom množina E *je měřitelná a platí*

$$\operatorname{meas} E = \sum_k \operatorname{meas} E_k\,.$$

Právě uvedené vlastnosti se také říká σ-aditivnost míry.

Míra ohraničených množin v $\mathbb{R}^1$ má dále tyto důležité vlastnosti:

24.13. Věta. *Platí:*
a) Jestliže ohraničená množina $E \subset \mathbb{R}^1$ je sjednocením spočetné množiny měřitelných množin, potom je množina E měřitelná.
b) Průnik spočetné množiny měřitelných množin je měřitelná množina.
c) Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.
d) Jsou-li E_1, E_2 dvě měřitelné množiny, přičemž $E_1 \supset E_2$, potom pro jejich rozdíl $E = E_1 \setminus E_2$ platí $\operatorname{meas} E = \operatorname{meas} E_1 - \operatorname{meas} E_2$.

24.14. Příklad. Nechť $Q_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$ je množina racionálních čísel na segmentu $\langle 0, 1\rangle$. Dokážeme, že

$$\operatorname{meas} Q_{01} = 0. \tag{24.1}$$

Racionální čísla (tj. čísla, která se dají vyjádřit ve tvaru $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná celá čísla) očíslujeme lexikograficky takto: $x_1 = 0 = \frac{0}{1}$, $x_2 = 1 = \frac{1}{1}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{2}{3}$, $x_6 = \frac{1}{4}$, $x_7 = \frac{3}{4}$, $x_8 = \frac{1}{5}$, $x_9 = \frac{2}{5}$, $x_{10} = \frac{3}{5}$, $x_{11} = \frac{4}{5}$, $x_{12} = \frac{1}{6}$, atd. (tj. čísla s menším q jsou číslována dříve; když mají dvě čísla stejné q, potom číslo s menším p je číslováno dříve). Vidíme, že množina Q_{01} je spočetná (tj. existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou $\mathbb{N}$ přirozených čísel a množinou Q_{01}).

Jednobodová množina $\{x\}$ je uzavřený interval, jehož počáteční a koncový bod splývají. Tedy $\operatorname{meas}\{x\} = x - x = 0$. Můžeme psát

$$Q_{01} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}, \quad \{x_i\} \cap \{x_j\} = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Tedy můžeme užít Větu 24.12, z které dostáváme (24.1). □

24.15. Příklad. Nechť $I_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$ je množina iracionálních čísel na segmentu $\langle 0, 1\rangle$. Dokážeme, že

$$\operatorname{meas} I_{01} = 1. \tag{24.2}$$

Platí $\operatorname{meas}\langle 0, 1\rangle = 1$. Protože $Q_{01} \subset \langle 0, 1\rangle = 1$, můžeme vzhledem k (24.1) užít Větu 24.13d, podle které

$$\operatorname{meas} I_{01} = \operatorname{meas}(\langle 0, 1\rangle \setminus Q_{01}) = \operatorname{meas}\langle 0, 1\rangle - \operatorname{meas} Q_{01} = 1 - 0 = 1,$$

což je vztah (24.2). □

24.16. Příklad. Protože množina I_{01} je podle Příkladu 24.15 měřitelná, platí vzhledem k Definici 24.12

$$\mathrm{m}_* I_{01} = \operatorname{meas} I_{01}. \tag{24.3}$$

Podle definice vnitřní míry (viz 24.9) existuje alespoň jedna uzavřená množina F, pro kterou platí $F \subset I_{01}$. Takovou uzavřenou množinu si neumíme představit, umíme však takových uzavřených množin zkonstruovat nespočetně mnoho. Ukažme to.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, ale pevně (přičemž $\varepsilon < \frac{1}{2}$). Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ je $J_{k,\varepsilon}$ otevřený interval tvaru

$$J_{k,\varepsilon} = \left(x_k - \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}, x_k + \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad x_k \in Q_{01}.$$

Platí

$$\operatorname{meas} J_{k,\varepsilon} = x_k + \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2} - \left(x_k - \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2^k}\varepsilon.$$

Položme

$$G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{k,\varepsilon}.$$

Podle Věty 6.15 je G_ε otevřená množina. Pro její míru platí (protože G_ε není sjednocení disjunktních otevřených intervalů)

$$\operatorname{meas} G_\varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{meas} J_{k,\varepsilon} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon. \tag{24.4}$$

Množinový rozdíl uzavřené množiny a otevřené množiny je uzavřená množina. Tedy

$$F_\varepsilon = \langle 0, 1\rangle \setminus G_\varepsilon$$

je uzavřená množina, pro jejíž míru vzhledem k (24.4) platí

$$1 \ge \operatorname{meas} F_\varepsilon \ge 1 - \varepsilon. \tag{24.5}$$

První nerovnost v (24.5) platí vzhledem k tomu, že $F_\varepsilon \subset \langle 0, 1\rangle$. Protože navíc množina F_ε neobsahuje vzhledem ke své definici ani jeden racionální bod x_k, je F_ε jedna z hledaných uzavřených množin, pro kterou platí $F_\varepsilon \subset I_{01}$.

Z (24.5) dále plyne

$$\sup_{F_\varepsilon \subset I_{01}} \{\operatorname{meas} F_\varepsilon\} = 1,$$

takže je splněn vztah (24.3). $\square$

24.17. Množiny míry nula. Pokud nelze zjistit přímým výpočtem, že daná množina má míru nula, postupujeme podle tohoto předpisu, který plyne z Věty 24.13a: Množina E má míru nula, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové pokrytí množiny E spočetným systémem otevřených intervalů I_k, že

$$\sum_k \operatorname{meas} I_k < \varepsilon\,.$$

Pomocí tohoto návodu lze také zjistit, že $\operatorname{meas} Q_{01} = 0$. Stačí jako pokrytí množiny Q_{01} užít intervaly $J_{k,\varepsilon}$. $\square$

25. Vlastnosti a strukura měřitelných funkcí

V 23.1 a 23.2 jsme uvedli definici měřitelné funkce a jednu z jejích základních vlastností, která nám stačila k definici Lebesgueova integrálu ohraničené měřitelné funkce $f(x)$. Tuto definici i vlastnost zopakujeme v Definici 25.1 a Větě 25.10.

a) Definice a nejjednodušší vlastnosti měřitelné funkce

Jestliže každému x z množiny E je přiřazeno nějaké číslo $f(x)$, budeme říkat, že na množině E je zadána funkce $f(x)$. Přitom připouštíme i nekonečné hodnoty funkce; požadujeme pouze, aby měly definované znaménko, tj. zavádíme "nevlastní" čísla $-\infty$ a $+\infty$. Tato čísla jsou spjata mezi sebou a s libovolným konečným číslem a nerovnostmi

$$-\infty < a < +\infty$$

a ustanovujeme pro ně následující zákony:

$$+\infty \pm a = +\infty, \quad +\infty + (+\infty) = +\infty, \quad +\infty - (-\infty) = +\infty,$$

$$-\infty \pm a = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad -\infty - (+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty,$$

$$+\infty \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty, \quad -\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \text{je-li } a > 0,$$

$$+\infty \cdot a = a \cdot (+\infty) = -\infty, \quad -\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) = +\infty, \quad \text{je-li } a < 0,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0.$$

Zde a označuje reálné konečné číslo. Symbolům

$$+\infty - (+\infty), \ -\infty - (-\infty), \ +\infty + (-\infty), \ -\infty + (+\infty), \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \frac{a}{0}$$

nepřipisujeme žádný smysl.[4]

25.1. Definice. Funkce $f(x)$ zadaná na množině E se nazývá *měřitelná*, je-li měřitelná tato množina E a jestliže pro libovolné a je měřitelná množina

$$E(f > a) := \{x \in E : \ f(x) > a\}.$$

25.2. Věta. *Každá funkce zadaná na množině míry nula je měřitelná.*

[4]Obvykle se symbolům $0 \cdot (\pm\infty)$ a $(\pm\infty) \cdot 0$ nepřipisuje také žádný smysl. V této teorii je však vhodnější považovat je rovné nule.

25.3. Věta. *Nechť $f(x)$ je měřitelná funkce zadaná na množině E. Je-li A měřitelná podmnožina množiny E, potom $f(x)$, uvažovaná pouze pro $x \in A$, je měřitelná. (Stručněji: potom $f(x)$ je měřitelná na množině A.)*

25.4. Věta. *Nechť $f(x)$ je dána na měřitelné množině E, která je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení konečně nebo spočetně mnoha měřitelných množin E_k,*

$$E = \bigcup_k E_k \,.$$

Je-li $f(x)$ měřitelná na každé množině E_k, potom je měřitelná také na množině E.

25.5. Definice. Dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ zadané na jedné a téže množině E se nazývají *ekvivalentní*, jestliže

$$\operatorname{meas} E(f \neq g) = 0 \,.$$

Ekvivalentnost dvou funkcí značíme $f(x) \sim g(x)$.

25.6. Definice. Nechť nějaká skutečnost S platí pro všechny body nějaké množiny E kromě bodů $x \in E_0 \subset E$. Je-li $\operatorname{meas} E_0 = 0$, potom říkáme, že S platí *téměř všude* na množině E nebo *pro skoro všechny* body množiny E.

25.7. Poznámka. Můžeme tedy říci, že dvě funkce zadané na množině E jsou ekvivalentní, jsou-li si rovné téměř všude na E.

25.8. Věta. *Je-li $f(x)$ měřitelná funkce zadaná na množině E a je-li $g(x) \sim f(x)$, potom $g(x)$ je také měřitelná.*

25.9. Věta. *Jestliže pro všechny body měřitelné množiny E je $f(x) = c$, potom $f(x)$ je měřitelná.*

25.10. Důsledek. *Stupňovitá funkce*[5] *je měřitelná.*

25.11. Věta. *Je-li $f(x)$ měřitelná funkce zadaná na množině E, potom při libovolném a jsou měřitelné množiny*

$$E(f \geq a) := \{x \in E : \, f(x) \geq a\}, \quad E(f = a) := \{x \in E : \, f(x) = a\},$$

$$E(f \leq a) := \{x \in E : \, f(x) \leq a\}, \quad E(f < a) := \{x \in E : \, f(x) < a\} \,.$$

25.12. Poznámka. Jestliže alespoň jedna z množin

$$E(f < a), \quad E(f \leq a), \quad E(f \geq a)$$

je měřitelná pro každé a, pak funkce $f(x)$ je měřitelná na množině E.

---

[5] Funkce $f(x)$ zadaná na segmentu $\langle a, b\rangle$ se nazývá *stupňovitá*, jestliže můžeme rozložit segment $\langle a, b\rangle$ body

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$$

na *konečný* počet částí, uvnitř kterých (tj. v intervalech (c_k, c_{k+1}), kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$) je funkce $f(x)$ *konstantní.*

25.13. Věta. *Je-li funkce $f(x)$, která je dána na množině E, měřitelná a je-li k konečné číslo, potom jsou měřitelné funkce* 1) $f(x)+k$, 2) $kf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$, 5) $1/f(x)$, *je-li* $f(x) \neq 0$.

25.14. Věta. *Funkce $f(x)$ zadaná a spojitá na segmentu $E = \langle a, b\rangle$ je měřitelná.*

25.15. Definice. Nechť M je podmnožina segmentu $E = \langle a, b\rangle$. Funkce $\varphi_M(x)$, která je rovna jedničce na množině M a nule na množině $E - M$, se nazývá *charakteristická funkce* množiny M.

25.16. Věta. *Množina M a její charakteristická funkce $\varphi_M(x)$ jsou současně měřitelné nebo ne.*

b) Další vlastnosti měřitelných funkcí

25.17. Věta. *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou konečné měřitelné funkce dané na množině E. Potom je měřitelná každá z funkcí* 1) $f(x)-g(x)$, 2) $f(x)+g(x)$, 3) $f(x)\cdot g(x)$, 4) $f(x)/g(x)$, *je-li* $g(x) \neq 0$.

25.18. Věta. *Nechť na množině E je dána posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n(x)\}$. Jestliže v každém bodě $x \in E$ existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,,$$

potom je funkce $F(x)$ měřitelná.

Následující věta je zobecněním věty 25.18.

25.19. Věta. *Nechť na množině E je dána posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n(x)\}$ a nějaká funkce $F(x)$. Platí-li vztah*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

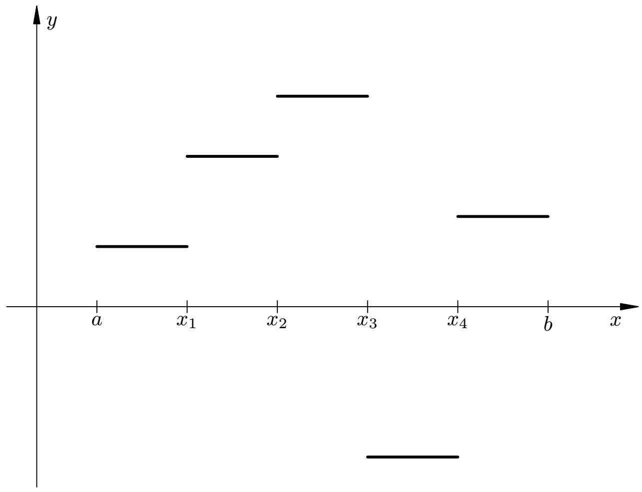
téměř všude na E, potom funkce $F(x)$ je měřitelná.

Text věty 25.18 je shodný s textem věty 25.19 až na to, že ve Větě 25.19 stačí konvergence téměř všude.

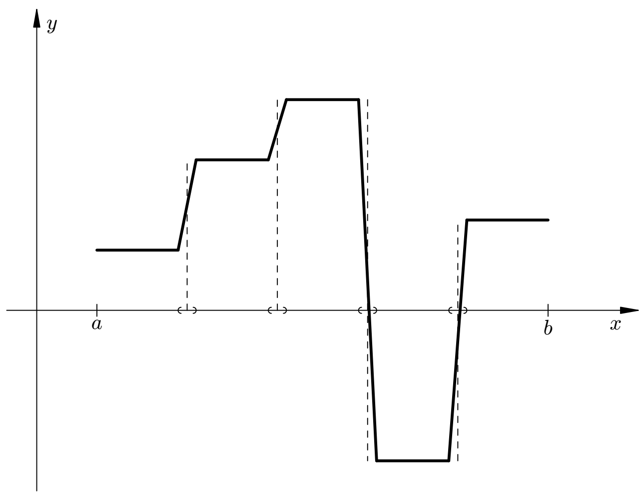
Užití Věty 25.19 ilustrujme na příkladu. Uvažujme *stupňovitou* funkci z Obr. 25.1

$$F(x) = c_i, \quad x \in \big\langle x_{i-1}, x_i\big) \quad (i = 1, \dots, 5,\ x_0 = a,\ x_5 = b)$$

s body nespojitosti $x_1, \dots, x_4$. Nechť $f_n(x)$ je spojitá aproximace funkce $F(x)$, kterou získáme podle Obr. 25.2 tak, že každý bod nespojitosti x_k je středem intervalu $(x_k - \frac{1}{n}, x_k + \frac{1}{n})$. Posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje s výjimkou v bodech $x_1, \dots, x_4$ k funkci $F(x)$, tj. téměř všude. (Důkaz je snadný: Zvolme bod $\overline{x} \in (a, b)$ ($\overline{x} \neq x_k$ $(k = 1, \dots, 4)$) libovolně, ale pevně. Ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $N(\varepsilon, \overline{x})$, že pro všechna $n > N(\varepsilon, \overline{x})$ je $f_n(\overline{x}) = F(\overline{x})$.) Tedy stupňovitá funkce $F(x)$ z Obr. 25.1 (a



Obr. 25.1 Stupňovitá funkce



Obr. 25.2 Aproximace stupňovité funkce spojitou funkcí

podobně *každá* stupňovitá funkce) je měřitelná. (Tím jsme poněkud komplikovaněji dokázali Důsledek 25.10.)

c) Struktura měřitelných funkcí

Základní strukturální vlastnost měřitelné funkce je vyjádřena větou 25.20.

25.20. Věta (Luzin). *Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na ohraničené měřitelné množině E. Potom tyto dvě podmínky jsou ekvivalentní (tj. $f(x)$, E splňují buďto obě podmínky nebo žádnou z nich):*
(I) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina $M(\varepsilon) \subset E$ tak, že $\operatorname{meas} M(\varepsilon) < \varepsilon$ a že $f(x)$ je spojitá v $E \setminus M(\varepsilon)$.
(II) Funkce $f(x)$ je měřitelná v množině E.

Důkaz implikace $(I) \Rightarrow (II)$.

Podle (I) ke každému přirozenému n existuje měřitelná množina $M(\frac{1}{n}) \subset E$ tak, že $\operatorname{meas} M(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ a že funkce $f(x)$ je spojitá v $E \setminus M(\frac{1}{n})$, takže $f(x)$ je měřitelná v $E \setminus M(\frac{1}{n})$. Tedy podle Věty 25.4 je funkce $f(x)$ měřitelná i v množině

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus M(\tfrac{1}{n}))\,.$$

Ale $E \setminus S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M(\frac{1}{n}) \subset M(\frac{1}{n})$ pro každé n,[6] a tedy

$$\operatorname{meas}(E \setminus S) \le \operatorname{meas} M(\tfrac{1}{n}) < \tfrac{1}{n} \quad \forall n,$$

čili

$$\operatorname{meas}(E \setminus S) = 0\,. \tag{25.1}$$

Definujme funkci

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in S, \\ 0 & \text{pro } x \notin S, \text{ tj. pro } x \in E \setminus S. \end{cases}$$

Podle (25.1) je

$$\operatorname{meas}\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

a protože $g(x)$ je měřitelná na množině E,[7] je podle Věty 25.8 funkce $f(x)$ měřitelná na E. $\square$

Opačná implikace $(II) \Rightarrow (I)$, která je též obsažena ve Větě 25.20, tvrdí jinými slovy, že *neexistuje funkce $f(x)$ měřitelná na ohraničené množině E, která by neměla vlastnost* (I). Jinak: (I) je nutnou podmínkou pro měřitelnost funkce $f(x)$.

Důkaz implikace $(II) \Rightarrow (I)$. Tento důkaz, který pro větší jednoduchost provedeme v případě $E = \langle a, b \rangle$, se opírá o několik významných vět, jejichž důkaz lze najít v [Na].

Věta A (Jegorov). *Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost měřitelných a téměř všude konečných funkcí $\{f_n(x)\}$, která téměř všude v E konverguje k měřitelné a téměř všude konečné funkci $f(x)$:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,. \tag{25.2}$$

V takovém případě existuje ke každému $\delta > 0$ taková měřitelná množina $E_\delta \subset E$, že
1) $\operatorname{meas} E_\delta > \operatorname{meas} E - \delta$,
2) *na množině E_δ probíhá konvergence* (25.2) *stejnoměrně.*

---

[6] Poznamenejme, že rovnost $E \setminus S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M(\frac{1}{n})$ plyne z prvního de Morganova pravidla $E - \bigcup\limits_i A_i = \bigcap\limits_i (E \setminus A_i)$ a rovnosti $E \setminus (E \setminus M(\frac{1}{n})) = M(\frac{1}{n})$. Pro úplnost uveďme druhé de Morganovo pravidlo: $E \setminus \bigcap\limits_i A_i = \bigcup\limits_i (E \setminus A_i)$.

[7] Je totiž pro každé $a > 0$ $H_a = \{x \in E : g(x) > a\} = \{x \in S : f(x) > a\} \subset S$ a $f(x)$ je na každé podmnožině množiny S spojitá, takže H_a je měřitelná. Nyní je zřejmé, že pro každé $a \le 0$ platí $H_a = \{x \in E : g(x) > a\} = \widetilde{H}_a \cup (E \setminus S)$, kde $\widetilde{H}_a = \{x \in S : f(x) > a\} \subset S$. Na H_a je $f(x)$ spojitá; co se týče $E \setminus S$, platí (25.1).

Věta B (Fréchet). *Pro každou měřitelnou a téměř všude konečnou funkci $f(x)$ danou na segmentu $\langle a, b\rangle$ existuje posloupnost spojitých funkcí, která konverguje k $f(x)$ téměř všude.*

Věta C. *Nechť F je uzavřená množina, obsažená v segmentu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $\varphi(x)$ spojitá na množině F, pak je možno definovat na $\langle a, b\rangle$ funkci $\psi(x)$ s následujícími vlastnostmi:*
1) *$\psi(x)$ je spojitá;*
2) *jestliže $x \in F$, potom $\psi(x) = \varphi(x)$;*
3) $\max|\psi(x)| = \max|\varphi(x)|$.

Ve Větě **D** navíc připomínáme základní vlastnost funkce spojité spojité v bodě x_0 (vlastnost 1) plyne z Poznámky 22.2, příklad d)):

Věta D. *Nechť na množině E je dána funkce $f(x)$, přičemž $f(x_0) \neq \pm\infty$. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in E$ ve dvou případech:*
1) *je-li x_0 izolovaným bodem množiny E;*
2) *jestliže $x_0 \in E'$ a vztahy*

$$x_n \to x_0, \quad x_n \in E$$

implikují vztah

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Samotný důkaz implikace $(II) \Rightarrow (I)$ již není příliš dlouhý: Nechť

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots \tag{25.3}$$

je ta posloupnost funkcí spojitých na segmentu $\langle a, b\rangle$, jejíž existence je zaručena Fréchetovou větou. Jegorovova věta zaručuje existenci takové měřitelné množiny $E_\delta \subset \langle a, b\rangle$, že

$$\operatorname{meas} E_\delta > b - a - \tfrac{\delta}{2},$$

přičemž na množině E_δ je konvergence posloupnosti (25.3) stejnoměrná:

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E_\delta.$$

Odtud podle známé věty z matematické analýzy plyne, že funkce $f(x)$ je spojitá na množině E_δ[8] (ve smyslu Věty **D**: Nelze tuto spojitost chápat tak, že funkce $f(x)$, která se uvažuje na $\langle a, b\rangle$, je spojitá v každém bodě množiny E_δ. Je třeba odstoupit od uvažování funkce $f(x)$ vně množiny E_δ – viz příklad v poznámce pod čarou[9]).

---

[8] V kurzech matematické analýzy se tato věta dokazuje pro případ funkcí, které jsou definovány na segmentu, ale důkaz platí i v případě funkcí, které jsou dány na libovolné množině.

[9] Uvažujme funkci ("obrácená" Dirichletova funkce)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ iracionální,} \\ 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ racionální.} \end{cases}$$

Tato funkce jako funkce $x \in \langle 0, 1\rangle$ není spojitá ani v jednom bodě segmentu $\langle 0, 1\rangle$, je však spojitá jako funkce $x \in I_{01}$ nebo $x \in Q_{01}$, kde $I_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$, resp. $Q_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$ je podmnožina iracionálních, resp. racionálních čísel segmentu $\langle 0, 1\rangle$. (Viz též Poznámku 22.2.)

Nechť F je uzavřená podmnožina množiny E_δ s mírou

$$\operatorname{meas} F > \operatorname{meas} E_\delta - \tfrac{\delta}{2}\,. \tag{25.4}$$

Existence množiny F plyne z vlastností suprema a měřitelnosti množiny E_δ: Je $\mathrm{m}_* E_\delta = \operatorname{meas} E_\delta$, takže vzhledem k definici $\mathrm{m}_* E$ existuje uzavřená množina $F \subset E_\delta$ splňující (25.4). Jestliže uvažujeme funkci $f(x)$ pouze na množině F, potom je spojitá na této množině.

Podle Věty C existuje na $\langle a, b\rangle$ spojitá funkce $\varphi(x)$, která je totožná s $f(x)$ na množině F. Tedy

$$E(f \neq \varphi) \subset \langle a, b\rangle \setminus F$$

a míra množiny $E(f \neq \varphi)$ je menší než δ, takže $\varphi(x)$ je hledaná funkce.

Jestliže navíc $|f(x)| \leq K$, potom tato nerovnost platí i pro $x \in F$, takže podle Věty C

$$|\varphi(x)| \leq K, \quad x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Tím je věta dokázána.[10] □

Implikaci $(II) \Rightarrow (I)$ z Luzinovy větu je možno zformulovat i takto: *Měřitelná a téměř všude konečná funkce se stane spojitou, jestliže zanedbáme vhodnou množinu libovolně malé míry.* Někteří autoři berou tuto závažnou vlastnost za samotnou definici pojmu měřitelné funkce. My jsme důkazem ekvivalence $(II) \Leftrightarrow (I)$ stanovili rovnocennost obou definic; druhá je méně formální a ihned ukazuje, že pojem měřitelné funkce je těsně spjat s pojmem spojité funkce.

Pomocí Věty 25.20 opět snadno dokážeme měřitelnost stupňovité funkce z Obr. 25.1. Nechť $G_n = \bigcup\limits_{k=1}^{4} (x_k - \frac{1}{n}, x_k + \frac{1}{n})$, kde n je libovolné přirozené číslo. Potom funkce $F(x)$ je na množině $\langle a, b) - G_n$ spojitá (je nutné promyslet Definici 22.1 spolu s Poznámkou 22.2 a Větou **D**). Tedy podle Věty 25.20 je funkce $F(x)$ měřitelná.

26. Základní vlastnosti integrálu ohraničené měřitelné funkce

26.1. Věta o střední hodnotě. *Jestliže měřitelná funkce $f(x)$ na měřitelné množině E vyhovuje nerovnostem*

$$a \leq f(x) \leq b,$$

potom

$$a \cdot \operatorname{meas} E \leq \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq b \cdot \operatorname{meas} E\,.$$

[10] Ilustrujme důkaz na na funkci $f(x)$ z předchozí poznámky pod čarou (i když okamžitě vidíme, že $\varphi(x) \equiv 1$): Pro členy posloupnosti (25.3) platí $\varphi_n(x) \equiv 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ a platí $\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x)$ pro $x \in I_{01}$. Zbývá sestrojit uzavřenou množinu F. Množina Q_{01} je (jako množina racionálních čísel) spočetná, takže její prvky můžeme očíslovat: $Q_{01} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Zvolme posloupnost intervalů $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $J_k = \left(x_k - \frac{1}{2^k}\frac{\delta}{4}, x_k + \frac{1}{2^k}\frac{\delta}{4}\right)$, a položme $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k$. Podle Věty 24.13a je G měřitelná množina a protože $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, je $\operatorname{meas} G \leq \frac{\delta}{2}$. Protože podle Věty 6.15a sjednocení libovolné množiny otevřených množin je otevřená množina, je G otevřená množina. Položme $F := C_{\langle 0,1\rangle} G = \langle 0, 1\rangle \setminus G$. Je zřejmé, že F je uzavřená množina a pro její míru platí $\operatorname{meas} F \geq 1 - \frac{\delta}{2}$. Tím je důkaz Luzinovy věty zcela ilustrován. Jediná potíž je, že si neumíme množinu G (a tedy ani množinu F) představit.

26.2. Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ konstantní na měřitelné množině E a $f(x) = c$, potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \operatorname{meas} E\,.$$

26.3. Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ nezáporná (nekladná), tak její integrál je také takový.*

26.4. Důsledek. *Je-li* $\operatorname{meas} E = 0$, *potom pro libovolnou ohraničenou funkci $f(x)$ danou na množině E je*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

26.5. Věta. *Nechť na měřitelné množině E je dána měřitelná ohraničená funkce $f(x)$. Je-li množina E sjednocením konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin*

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j),$$

potom

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

26.6. Poznámka. Tato vlastnost integrálu se nazývá *totální aditivnost integrálu* (nebo též *σ-aditivnost integrálu*).

26.7. Důsledek. *Jsou-li měřitelné ohraničené funkce $f(x)$ a $g(x)$ dané na množině E ekvivalentní, potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Toto tvrzení plyne z Důsledku 26.4.

26.8. Poznámka. Mimo jiné, *integrál funkce, která je ekvivalentní nule, je roven nule.* Toto tvrzení však nelze obrátit, jak ukazuje příklad:
Je-li funkce $f(x)$ zadána na segmentu $\langle -1, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

potom

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 1 = 0\,,$$

ačkoliv funkce $f(x)$ není ekvivalentní nule. Platí však:

26.9. Důsledek. *Je-li integrál nezáporné měřitelné ohraničené funkce $f(x)$ roven nule,*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (f(x) \geq 0),$$

potom je tato funkce ekvivalentní nule.

26.10. Věta. *Jsou-li na měřitelné množině E dány dvě měřitelné ohraničené funkce $f(x)$ a $F(x)$, potom*

$$\int_E [f(x) + F(x)]\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E F(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.11. Věta. *Je-li na měřitelné množině E dána měřitelná ohraničená funkce $f(x)$ a c je konečná konstanta, potom*

$$\int_E cf(x)\,\mathrm{d}x = c \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

26.12. Důsledek. *Jsou-li $f(x)$ a $F(x)$ měřitelné a ohraničené na měřitelné množině E, potom*

$$\int_E [f(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E F(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.13. Věta. *Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou měřitelné a ohraničené na měřitelné množině E. Je-li*

$$f(x) \leq F(x),$$

potom

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E F(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.14. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ měřitelná a ohraničená na měřitelné množině E, potom*

$$\left| \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

27. Dvě diskontinua

27.1. Cantorovy množiny G a P. Uvažujme segment $\langle 0, 1\rangle$ a začněme z něj nekonečným procesem vyjímat otevřené intervaly takto: V nultém kroku vyjmeme ze segmentu (otevřený) interval $G_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; zbudou dva segmenty $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ a $\langle \frac{2}{3}, 1\rangle$. Z těchto dvou segmentů vyjmeme intervaly $G_{11} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a $G_{12} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ (tzv. první krok). Zbudou celkem čtyři segmenty. Na druhém kroku z každého z těchto čtyř segmentů vyjmeme interval G_{2j} $(1 \leq j \leq 4)$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož délka je rovna jedné třetině segmentu. Obecně v k-tém kroku $(k = 0, 1, 2, \dots)$ vyjímáme 2^k intervalů, které tvoří otevřenou množinu

$$G_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} G_{kj}\,,$$

jejíž Lebesgueova míra je

$$\operatorname{meas} G_k = \frac{2^k}{3^{k+1}} .$$

Sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina, takže dospíváme ke *Cantorově diskontinuu*

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} G_{kj},$$

pro jehož Lebesgueovu míru platí

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} G = \operatorname{meas}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} G_{kj}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.\end{aligned}$$

Protože komplement otevřené množiny do uzavřené množiny je uzavřená množina, je množina

$$P = \langle 0, 1\rangle \setminus G$$

uzavřená a její Lebesgueova míra je

$$\operatorname{meas} P = 1 - \operatorname{meas} G = 0 .$$

Paradox, který vzniká v souvislosti s uzavřenou množinou P, je tento: Ačkoliv množina P má Lebesgueovu míru nula, je to množina s mohutností kontinua (tj. dá se vzájemně jednoznačně zobrazit na segment $\langle 0, 1\rangle$).

Poznamenejme, že častěji se Cantorovy množiny značí symboly G_0 a P_0. My jsme však symbol G_0 užili v konstrukci *Cantorova diskontinua* v jiném smyslu. □

Druhé zajímavé diskontinuum, které nazveme *ε-diskontinuem*, je uvedeno v 27.2.

27.2. Limitní přechod za znakem integrálu. Na jednom zajímavém příkladu ukážeme v jaké oblasti je Riemannův integrál také nedostatečným prostředkem.

Uvažujme segment (tj. uzavřený interval) $\langle 0, 1\rangle$. Vytvoříme nekonečným procesem, který je podobný vytváření Cantorových množin $G \subset \langle 0, 1\rangle$ a $P \subset \langle 0, 1\rangle$, množinu, kterou označíme $K(\varepsilon) \subset \langle 0, 1\rangle$ a nazveme *ε-diskontinuem* (viz Obr. 27.1). Zvolíme $0 < \varepsilon \le \frac{1}{4}$ pevně a na 1. kroku vyjmeme ze segmentu $\langle 0, 1\rangle$ interval K_1^ε, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je ε. Zbudou dva segmenty o míře $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$.

Na 2. kroku z každého ze dvou segmentů vyjmeme interval K_{2i}^ε $(i = 1, 2)$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je $\frac{\varepsilon}{4}$. Na tomto kroku vyjímáme otevřenou množinu $K_2^\varepsilon = K_{21}^\varepsilon \cup K_{22}^\varepsilon$, jejíž míra je $\operatorname{meas} K_2^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. Zbudou čtyři segmenty, každý o míře $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8}$.

Na 3. kroku z každého ze čtyř segmentů vyjmeme interval K_{3i}^ε $(i = 1, \dots, 4)$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je $\frac{\varepsilon}{16}$. Na tomto kroku vyjímáme otevřenou množinu

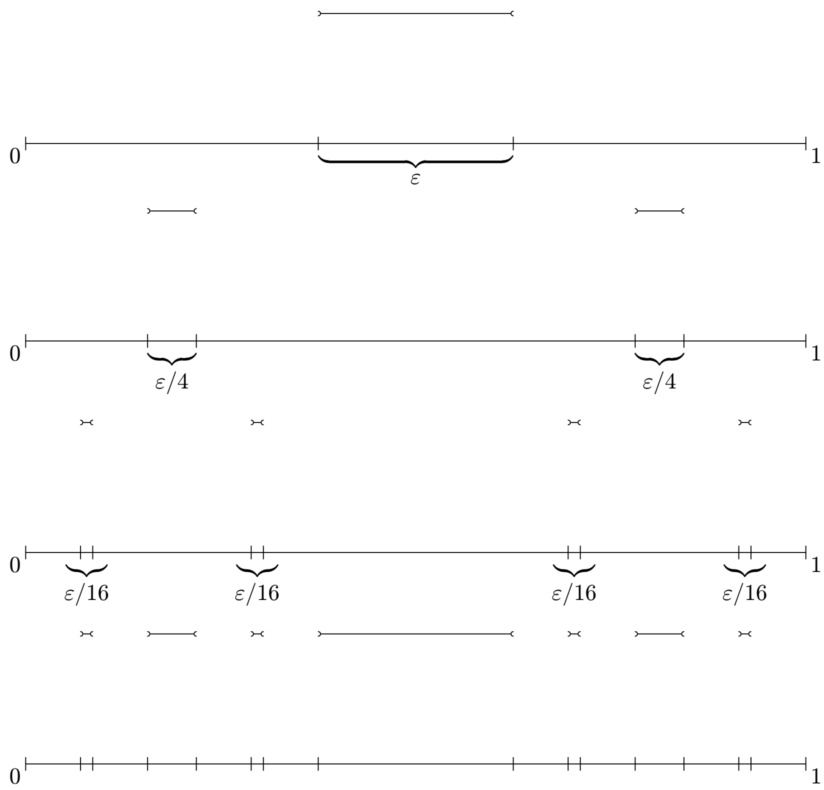
$$K_3^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{4} K_{3i},$$

jejíž míra je $\operatorname{meas} K_3^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$. Zbude osm segmentů, každý o míře $\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{16} - \frac{\varepsilon}{32}$.

Obecně na n-tém kroku z každého z 2^{n-1} segmentů vyjmeme interval K_{ni}^ε $(i = 1, \dots, 2^{n-1})$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je $\frac{\varepsilon}{4^{n-1}}$. Na tomto kroku vyjímáme otevřenou množinu

$$K_n^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} K_{ni},$$

jejíž míra je $\operatorname{meas} K_n^\varepsilon = 2^{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{4^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.



Obr. 27.1. Konstrukce charakteristické funkce ε-diskontinua

Protože sjednocení spočetně mnoha intervalů je otevřená množina, vyjmeme tímto nekonečným procesem ze segmentu $\langle 0, 1\rangle$ otevřenou množinu

$$K(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} K_{ni}^{\varepsilon},$$

pro jejíž Lebesgueovu míru platí

$$\begin{aligned} \operatorname{meas} K(\varepsilon) &= \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \\ &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \varepsilon \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Protože komplement otevřené množiny do uzavřené množiny je uzavřená množina, je množina

$$S(\varepsilon) = \langle 0, 1\rangle - K(\varepsilon)$$

uzavřená a její Lebesgueova míra je

$$\operatorname{meas} S(\varepsilon) = 1 - \operatorname{meas} K(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon\,.$$

Zaveďme dvě funkce (tzv. *charakteristické funkce* množin G_0 a $K(\varepsilon)$):

$$\chi_{G_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in G_0, \\ 0 & \text{pro } x \in P_0, \end{cases}$$

$$\chi_{K(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in K(\varepsilon), \\ 0 & \text{pro } x \in S(\varepsilon). \end{cases}$$

27.3. Tvrzení. *Množina P_0 je množinou bodů nespojitosti funkce $\chi_{G_0}(x)$ a množina $S(\varepsilon)$ je množinou bodů nespojitosti funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$.*

Důkaz. Důkaz v obou případech probíhá stejně; provedeme jej proto jen v případě funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$. Zvolme $x_0 \in S(\varepsilon)$ libovolně, ale pevně, a zvolme dále libovolně $\delta > 0$. Nechť $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je δ-okolí bodu x_0. Protože vytvořením množiny $K(\varepsilon)$ vznikne nekonečně mnoho množin K^ε_{kj}, je snadno vidět, že po m krocích vytváření množiny $K(\varepsilon)$, kde $\frac{1}{2\delta} + 1 < 2^m$, vznikne množina K^ε_m, pro kterou platí $K^\varepsilon_m \cap O_\delta(x_0) \neq \emptyset$. Tedy v libovolném okolí $O_\delta(x_0)$ existují body x, pro které $\chi_{K(\varepsilon)}(x) = 1$, přičemž $\chi_{K(\varepsilon)}(x_0) = 0$. Odtud plyne nespojitost funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$ v libovolném bodě $x_0 \in S(\varepsilon)$.

V každém bodě $x_0 \in K(\varepsilon)$ je funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$ spojitá: Protože $K(\varepsilon)$ je otevřená množina, existuje $\delta > 0$ tak, že $O_\delta(x_0) \subset K(\varepsilon)$. Avšak $\chi_{K(\varepsilon)}(x) = 1$ $\forall x \in K(\varepsilon)$. $\square$

27.4. Důsledek. *Funkce $\chi_G(x)$ je riemannovsky integrovatelná, kdežto funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$ není riemannovsky integrovatelná; je pouze lebesgueovsky integrovatelná.*

Důkaz. Uvedený výsledek plyne z Tvrzení 27.3, Věty 23.6, faktu, že $\operatorname{meas} P = 0$ a $\operatorname{meas} S(\varepsilon) > 0$, a zřejmé lebesgueovské integrovatelnosti funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$. $\square$

V Lebesgueově smyslu platí

$$\int_0^1 \chi_{K(\varepsilon)}(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{meas} K(\varepsilon) = 2\varepsilon.$$

V Riemannově (a tedy i Lebesgueově) smyslu platí

$$\int_0^1 \chi_{K^\varepsilon_1 \cup K^\varepsilon_2 \cup \cdots \cup K^\varepsilon_n}(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right),$$

takže v Lebesgueově smyslu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \chi_{K^\varepsilon_1 \cup K^\varepsilon_2 \cup \cdots \cup K^\varepsilon_n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \chi_{K^\varepsilon_1 \cup K^\varepsilon_2 \cup \cdots \cup K^\varepsilon_n}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \chi_{K(\varepsilon)}(x)\,\mathrm{d}x = 2\varepsilon\,.$$

Vidíme tedy, že Lebesgueova míra a Lebesgueův integrál jsou účinné jak v případě patologických funkcí (jako např. Dirichletova funkce nebo $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$), tak patologických jevů, které z hlediska Riemannova integrálu vznikají při limitních přechodech (právě uvedený příklad je totiž speciálním případem Lebesgueovy věty o záměně integrace a limitního přechodu – viz kap. 28).

Uveďme ještě paradox, který souvisí s otevřenou množinou $K(\varepsilon)$. Hranice ∂M otevřené množiny M se obvykle definuje jako

$$\partial M = \overline{M} \setminus M\,,$$

kde $\overline{M}$ je uzávěr množiny M. Z důkazu Tvrzení 27.3 plyne, že $\overline{K}(\varepsilon) = \langle 0, 1\rangle$, takže

$$\partial K(\varepsilon) = \langle 0, 1\rangle \setminus K(\varepsilon) = S(\varepsilon)\,.$$

Zatímco každá z množin $K^\varepsilon_1 \cup K^\varepsilon_2 \cup \cdots \cup K^\varepsilon_n$ má hranici, která sestává z konečného počtu bodů, a má tedy míru rovnu nule, je

$$\operatorname{meas} \partial K(\varepsilon) = \operatorname{meas} S(\varepsilon) = 1 - \operatorname{meas} K(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon\,.$$

Řešíme tento problém: Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost měřitelných ohraničených funkcí

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

která v nějakém smyslu (stejnoměrně, všude, téměř všude) konverguje k měřitelné ohraničené funkci $F(x)$. Tážeme se, platí-li vztah

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{28.1}$$

Platí-li (28.1), říkáme, že je možný limitní přechod za znakem integrálu.

Uveďme příklad, že (28.1) obecně neplatí. Definujme na $\langle 0,1\rangle$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{pro } x \notin (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Potom pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ bude (dokažte jako cvičení)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

ale

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

a tento integrál nekonverguje k nule. Omezíme se na větu:

28.1. Věta (Legesgue). *Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost $\{f_n(x)\}$ měřitelných* **ohraničených** *funkcí konvergující téměř všude k měřitelné ohraničené funkci $F(x)$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \quad \forall x \in E - E_0 \ (\operatorname{meas} E_0 = 0).$$

Existuje-li konstanta K, že pro všechna n a všechna x[11]

$$|f_n(x)| < K, \tag{28.2}$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E F(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

[11] V uvedeném příkladě není splněna právě tato podmínka, tzv. podmínka stejnoměrné ohraničenosti posloupnosti funkcí.

29. Srovnání Riemannova a Lebesgueova integrálu

Pro velkou důležitost Vět 23.6 a 23.7 opakujeme tyto věty znovu v samostatné kapitole a dokážeme je.

29.1. Věta (Lebesgue). *Aby ohraničená funkce byla integrovatelná (R), je nutné a stačí, aby byla téměř všude spojitá.*

29.2. Věta. *Každá funkce integrovatelná (R) je nutně integrovatelná i (L) a oba integrály jsou sobě rovny.*

Obrácená věta neplatí - viz např. Dirichletovu funkci:

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální,} \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální.} \end{cases}$$

Lebesqueův integrál z této funkce je podle Příkladu 23.5 roven nule, kdežto Riemannův integrál z této funkce podle Příkladu 22.8 neexistuje.

29.3. Příklad. Nyní dokážeme, že Riemannův integrál z Riemannovy funkce $f_R(x)$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je roven nule,

$$(R)\int_0^1 f_R(x)\ \mathrm{d}x = (L)\int_0^1 f_R(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Tento výsledek získáme pomocí Vět 29.1 a 29.2 snadno: Nechť $Q \subset \langle 0,1\rangle$ značí množinu racionálních a $I \subset \langle 0,1\rangle$ iracionálních čísel. Potom podle Věty 26.5

$$\int_0^1 f_D(x)\ \mathrm{d}x = \int_I f_R(x)\ \mathrm{d}x + \int_Q f_R(x)\ \mathrm{d}x.$$

Protože $f_R(x) = 0$ pro $x \in I$, je

$$(L)\int_I f_R(x)\ \mathrm{d}x = 0\,.$$

Co se týče druhého integrálu, stačí užít Důsledek 26.4 věty o střední hodnotě a skutečnost, že $\operatorname{meas} Q = 0$, abychom dostali

$$(L)\int_Q f_R(x)\ \mathrm{d}x = 0\,. \quad \square$$

Nyní přikročíme k důkazu Vět 29.1 a 29.2. Nechť na segmentu $\langle a,b\rangle$ je dána (ne nutně konečná) funkce $f(x)$. Nechť $x_0 \in \langle a,b\rangle$ a $\delta > 0$. Označme symbolem $m_\delta(x_0)$, resp. $M_\delta(x_0)$ infimum, resp. supremum funkce $f(x)$ na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,

$$m_\delta(x_0) = \inf\{f(x)\}, \quad M_\delta(x_0) = \sup\{f(x)\}, \quad \text{kde } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

(Samozřejmě uvažujeme pouze ty body intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, které leží na segmentu $\langle a,b\rangle$.) Zřejmě platí

$$m_\delta(x_0) \le f(x_0) \le M_\delta(x_0).$$

Pokud se δ zmenšuje, potom se $m_\delta(x_0)$ nezmenšuje a $M_\delta(x_0)$ nezvětšuje. Proto existují limity

$$m(x_0) = \lim_{\delta\to 0} m_\delta(x_0), \quad M(x_0) = \lim_{\delta\to 0} M_\delta(x_0), \tag{29.1}$$

přičemž zřejmě

$$m_\delta(x_0) \le m(x_0) \le f(x_0) \le M(x_0) \le M_\delta(x_0). \tag{29.2}$$

29.4. Definice. Funkce $m(x)$, resp. $M(x)$ se nazývá *dolní*, resp. *horní Baireova funkce* pro funkci $f(x)$.

29.5. Věta (Baire). *Nechť funkce $f(x)$ je konečná v bodě x_0. Aby funkce $f(x)$ byla v bodě x_0 spojitá, je nutné a stačí, aby platilo*

$$m(x_0) = M(x_0). \tag{29.3}$$

Důkaz. a) *Nutnost.* Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Zvolme libovolně, ale pevně $\varepsilon > 0$. Potom lze najít takové $\delta > 0$, že pro všechny body x splňující nerovnost

$$|x - x_0| < \delta$$

platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bude

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Odtud však plyne

$$f(x_0) - \varepsilon \le m_\delta(x_0) \le M_\delta(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon$$

a tím spíše podle (29.2)

$$f(x_0) - \varepsilon \le m(x_0) \le M(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon,$$

odkud vzhledem k libovolnosti ε plyne (29.3).

b) *Dostatečnost.* Nechť nyní naopak platí (29.3). Potom podle (29.2)

$$m(x_0) = M(x_0) = f(x_0) \tag{29.4}$$

a společná hodnota obou Baireových funkcí je v bodě x_0 konečná.

Zvolme libovolně, ale pevně $\varepsilon > 0$ a najděme tak malé $\delta > 0$, že

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \le m(x_0), \quad M(x_0) \le M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Odtud podle (29.4)

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0), \quad M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{29.5}$$

Jestliže nyní $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pak hodnota $f(x)$ leží mezi $m_\delta(x_0)$ a $M_\delta(x_0)$, takže podle (29.5)

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Jinými slovy, z toho, že $|x - x_0| < \delta$ plyne, že

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

tj. funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. $\square$

29.6. Lemma. *Uvažujme posloupnost dělení segmentu $\langle a, b\rangle$*

$$a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_{n_1}^{(1)} = b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_{n_i}^{(i)} = b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

přičemž při $i \to \infty$

$$\lambda_i = \max\{|x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}|\} \to 0.$$

Nechť $m_k^{(i)}$ je infimum hodnot funkce $f(x)$ na segmentu $\langle x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\rangle$. Zaveďme funkci $\varphi_i(x)$ vztahy

$$\varphi_i(x) = m_k^{(i)} \text{ pro } x \in (x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}),$$

$$\varphi_i(x) = 0 \text{ pro } x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{n_1}^{(i)}.$$

Jestliže bod x_0 není totožný s žádným z bodů $x_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n_i)$, potom

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x_0) = m(x_0).$$

Důkaz. Zvolme nějaké i pevně a označme symbolem $\langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\rangle$ ten ze segmentů i-tého způsobu dělení, který obsahuje bod x_0. Protože bod x_0 není totožný s žádným bodem dělení, platí

$$x_{k_0}^{(i)} < x_0 < x_{k_0+1}^{(i)},$$

takže při dostatečně malých $\delta > 0$ bude

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\rangle.$$

Z této inkluze plyne, že

$$m_{k_0}^{(i)} \le m_\delta(x_0),$$

čili, což je totéž, že

$$\varphi_i(x_0) \le m_\delta(x_0).$$

Přejděme k limitě pro $\delta \to 0$. Potom najdeme, že při libovolném i platí (vzhledem k definici funkce $m(x)$ – viz (29.1))

$$\varphi_i(x_0) \le m(x_0).$$

Tím je Lemma 29.6 dokázáno v případě $m(x_0) = -\infty$. Nechť nyní $m(x_0) > -\infty$ a nechť $h < m(x_0)$. Potom nalezneme takové $\delta > 0$, že $m_\delta(x_0) > h$. Jestliže fixujeme toto δ, najdeme dostatečně velké i_0, že při $i > i_0$ bude

$$\langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\rangle \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

kde (jako výše) $\langle x^{(i)}_{k_0}, x^{(i)}_{k_0+1}\rangle$ je segment, který obsahuje bod x_0. Existence takového i_0 plyne z podmínky $\lambda_i \to 0$.

Pro takové indexy i bude

$$m^{(i)}_{k_0} \geq m_\delta(x_0) > h,$$

čili (což je totéž)

$$\varphi_i(x_0) > h.$$

Tedy pro **každé** $h < m(x_0)$ lze nalézt takový index i_0, že při $i > i_0$ je

$$h < \varphi_i(x_0) \leq m(x_0),$$

což znamená, že $\varphi_i(x_0) \to m(x_0)$. $\square$

29.7. Důsledek. *Baireovy funkce* $m(x)$ *a* $M(x)$ *jsou měřitelné.*

Důkaz. Množina bodů všech dělení $\{x^{(i)}_k\}$ je spočetná, takže má míru nula. Proto z Lemmatu 29.6 plyne, že $\varphi_i(x) \to m(x)$ téměř všude. Ale funkce $\varphi_i(x)$ jsou měřitelné, protože jsou schodovité. Z Věty 25.19 tedy plyne, že funkce $m(x)$ je měřitelná. Pro Baireovu funkci $M(x)$ probíhá důkaz obdobně. (Musí se dokázat analogie Lemmatu 29.6, tj. $\lim_{i\to 0} \varphi_i(x_0) = M(x_0)$, kde v definici funkcí $\varphi_i(x)$ je symbol $m^{(i)}_k$ nahrazen symbolem $M^{(i)}_k$, kde $M^{(i)}_k$ je supremum hodnot funkce $f(x)$ na segmentu $\langle x^{(i)}_k, x^{(i)}_{k+1}\rangle$.) $\square$

29.8. Důsledek. *Je-li v podmínkách Lemmatu* 29.6 *funkce* $f(x)$ *ohraničená, potom*

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x \to (L)\int_a^b m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Jestliže $|f(x)| \leq K$, potom zřejmě platí

$$|\varphi_i(x)| \leq K, \quad |m(x)| \leq K.$$

Protože funkce $\varphi_i(x)$, $m(x)$ jsou měřitelné, jsou tedy integrovatelné (L). Nyní stačí užít Větu 28.1 (o limitním přechodu za znakem integrálu) a Lemma 29.6:

$$\lim_{i\to 0}(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^b \lim_{i\to 0}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^b m(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

Důkaz Věty 29.1. Přeformulujme nyní pro účely tohoto důkazu tvrzení Důsledku 29.8. Za tím účelem si všimněme, že

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n_i-1}\int_{x^{(i)}_k}^{x^{(i)}_{k+1}} \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n_i-1} m^{(i)}_k (x^{(i)}_{k+1} - x^{(i)}_k) = s_i,$$

kde s_i je dolní Darbouxův součet (vystupující v definici Riemannova integrálu), který odpovídá i-tému způsobu dělení segmentu $\langle a, b\rangle$. Tedy tvrzení Důsledeku 29.8 znamená, že při $i \to \infty$

$$s_i \to (L)\int_a^b m(x)\,\mathrm{d}x. \tag{29.6}$$

Analogicky můžeme stanovit, že horní Darbouxův součet S_i při rostoucím i konverguje k integrálu z horní Baireovy funkce

$$S_i \to (L)\int_a^b M(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dohromady tedy dostáváme

$$S_i - s_i \to (L)\int_a^b (M(x) - m(x))\,\mathrm{d}x. \tag{29.7}$$

Na druhé straně v základním kurzu matematické analýzy se dokazuje, že pro to, aby ohraničená funkce $f(x)$ byla integrovatelná (R) je nutné a stačí, aby $S_i - s_i \to 0$.

Srovnáme-li toto tvrzení se vztahem (29.7), vidíme, že pro integrovatelnost (R) funkce $f(x)$ je nutné a stačí, aby

$$(L)\int_a^b (M(x) - m(x))\,\mathrm{d}x = 0. \tag{29.8}$$

Podmínka (29.8) je v každém případě splněna, je-li rozdíl $M(x) - m(x)$ ekvivalentní nule, tj. symbolicky $M(x) - m(x) \sim 0$. Ale protože tento rozdíl je podle (29.2) **nezáporný**, tak i obráceně z (29.8) plyne, že (viz Důsledek 26.9)

$$m(x) \sim M(x). \tag{29.9}$$

Integrovatelnost (R) ohraničené funkce $f(x)$ je tedy rovnocenná se vztahem (29.9). Srovnáme-li tento výsledek s tvrzením Věty 29.5, dostáváme tvrzení Věty 29.1. □

Důkaz Věty 29.2. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná (R). Potom je $f(x)$ nutně ohraničená a podle Vět 29.1 a 29.5 bude

$$m(x) = M(x) \quad \text{téměř všude na } \langle a, b\rangle.$$

Podle (29.2) však je

$$m(x) \le f(x) \le M(x),$$

což s předchozím vztahem dává

$$f(x) = m(x) \quad \text{téměř všude na } \langle a, b\rangle. \tag{29.10}$$

Protože funkce $f(x)$ je ekvivalentní s měřitelnou funkcí $m(x)$ (viz Důsledek 29.7), tak je podle Věty 25.8 sama měřitelná. Každá ohraničená měřitelná funkce je integrovatelná (L), takže je funkce $f(x)$ integrovatelná (L). Tím jsme dokázali, že z integrovatelnosti libovolné funkce v Riemannově smyslu plyne její integrovatelnost v Lebesgueově smyslu.

Nakonec z ekvivalentnosti funkcí $f(x)$ a $m(x)$ (viz (29.10)) plyne, že

$$(L)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (L)\int_a^b m(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ale, jak je známo ze základního kurzu matematické analýzy, v podmínkách Lemmatu 29.6 pro funkci $f(x)$ integrovatelnou (R) platí

$$s_i \to (R)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x,$$

kde s_i je dolní Darbouxův součet korespondující i-tému způsobu dělení segmentu $\langle a, b\rangle$. Srovnáme-li tento fakt s (29.6), vidíme vzhledem k (29.10), že

$$(R)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Tím je Věta 29.2 dokázána. □

30. Stanovení primitivní funkce

30.1. Věta. *Nechť funkce $f(x)$ má v každém bodě segmentu $\langle a, b\rangle$ derivaci $f'(x)$. Je-li $f'(x)$* **ohraničená**, *pak je integrovatelná (L) a platí*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

31. Integrál nezáporné měřitelné funkce

V této a další kapitole je zobecněna definice Lebesgueova integrálu na neohraničené funkce.

31.1. Lemma. *Nechť funkce $f(x)$ je měřitelná a nezáporná na měřitelné množině E. Nechť dále je N přirozené číslo. Je-li funkce $[f(x)]_N$ definována vztahem*[1]

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x) & \text{je-li } f(x) \le N, \\ N & \text{je-li } f(x) > N, \end{cases}$$

potom je tato funkce také měřitelná.

V podmínkách lemmatu je funkce $[f(x)]_N$ ohraničená a tedy integrovatelná (L). Protože kromě toho

$$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le [f(x)]_3 \le \dots,$$

tak

$$\int_E [f]_1 \,\mathrm{d}x \le \int_E [f]_2 \,\mathrm{d}x \le \int_E [f]_3 \,\mathrm{d}x \le \dots$$

a existuje určitá (konečná nebo nekonečná) limita

$$\lim_{N \to \infty} \int_E [f(x)]_N \,\mathrm{d}x. \tag{*}$$

31.2. Definice. Limitu $(*)$ nazýváme Lebesgueovým integrálem funkce $f(x)$ na množině E a značíme symbolem

$$\int_E f(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{nebo } (L) \int_E f(x) \,\mathrm{d}x$$

a pokud $E = \langle a, b \rangle$ potom symbolem

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Je-li tento integrál konečný, potom se funkce $f(x)$ nazývá integrovatelnou (L) nebo integrace schopnou na množině E.

31.3. Poznámka. Tímto způsobem připisujeme integrál *každé měřitelné* nezáporné funkci, ale integrovatelnými nazýváme pouze ty funkce, jejichž integrál je konečný. Snadno vidíme, že pro *ohraničenou*, měřitelnou a nezápornou funkci $f(x)$ nová definice integrálu splývá s dřívější, neboť při dostatečně velkých N bude $[f(x)]_N \equiv f(x)$. Proto je každá ohraničená (měřitelná a nezáporná) funkce integrovatelná.

[1] Tato funkce se nazývá „seříznutí funkce $f(x)$ číslem N.“

Příklad. a) Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

$$\left[\frac{1}{x}\right]_N = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{je-li } \frac{1}{x} \le N \text{ čili } \frac{1}{N} \le x, \\ N, & \text{je-li } \frac{1}{x} > N \text{ čili } \frac{1}{N} > x. \end{cases}$$

Odtud

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{N}} N\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \big[Nx\big]_0^{\frac{1}{N}} + \Big[\ln x\Big]_{\frac{1}{N}}^1 = 1 + 0 + \ln 1 - \ln\frac{1}{N} = 1 + 0 - 0 + \ln N.$$

Odtud limitním přechodem pro $N \to +\infty$ dostáváme

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

b) Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_N = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{je-li } \frac{1}{\sqrt{x}} \le N \text{ čili } \frac{1}{N^2} \le x, \\ N, & \text{je-li } \frac{1}{sx} > N \text{ čili } \frac{1}{N^2} > x. \end{cases}$$

Odtud

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{N^2}} N\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{N^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \Big[Nx\Big]_0^{\frac{1}{N^2}} + \Big[2\sqrt{x}\Big]_{\frac{1}{N^2}}^1 = \frac{1}{N} + 2 - \frac{2}{N}.$$

Odtud limitním přechodem pro $N \to +\infty$ dostáváme

$$\int_0^1 \frac{1}{sx}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Tedy funkce $\frac{1}{x}$ není integrace schopná podle Lebesguea, ale funkce $\frac{1}{sx}$ je integrace schopná. (Dostali jsme podobný výsledek jako v teorii nevlastního Riemannova integrálu: první integrál diverguje, kdežto druhý konverguje.)

31.4. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E, potom je na této množině téměř všude konečná.*

31.5. Věta. *Je-li* $\operatorname{meas} E = 0$, *potom každá nezáporná funkce* $f(x)$ *je integrovatelná na množině* E *a platí*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

31.6. Věta. *Jsou-li funkce* $f(x)$ *a* $g(x)$ *ekvivalentní na množině* E, *potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.7. Věta. *Je-li funkce* $f(x)$ *nezáporná a měřitelná na množině* E *a je-li* E_0 *měřitelná podmnožina množiny* E, *potom*

$$\int_{E_0} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.8. Věta. *Nechť funkce* $f(x)$ *a* $F(x)$ *jsou nezáporné a měřitelné na množině* E. *Je-li* $f(x) \le F(x)$, *potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_E F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.9. Věta. *Jestliže pro nezápornou a měřitelnou funkci na množině* E *platí*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

potom je funkce $f(x)$ *ekvivalentní nule.*

31.10. Věta. *Nechť* $f_1(x)$ *a* $f_2(x)$ *jsou dvě nezáporné měřitelné funkce na množině* E. *Je-li* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.11. Věta. *Je-li* $f(x) \ge 0$ *měřitelná funkce daná na množině* E *a* $k \ge 0$ *konečné číslo, potom*

$$\int_E k f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.19. Věta (Totální aditivnost integrálu). *Nechť měřitelná množina* E *je sjednocením konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin* E_k,

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \ne j).$$

Pro každou nezápornou měřitelnou funkci $f(x)$ *danou na množině* E *bude*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32. Integrovatelné funkce libovolného znaménka

Nechť $f(x)$ je měřitelná funkce daná na měřitelné množině E. Zaveďme funkce

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{pro } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{pro } f(x) < 0. \end{cases}$$

Tyto funkce jsou měřitelné a nezáporné, takže existují oba integrály

$$\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Platí

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)\,.$$

Je proto přirozené dohodnout se nazývat rozdíl

$$\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x \tag{*}$$

integrálem funkce $f(x)$. Protože „rozdíl“ $+\infty - (+\infty)$ nemá smysl, má symbol $(*)$ smysl tehdy a jen tehdy, když alespoň jedna z funkcí $f_+(x)$ a $f_-(x)$ je integrovatelná.

32.1. Definice. Je-li alespoň jedna z funkcí $f_+(x)$ nebo $f_-(x)$ integrovatelná na množině E, potom nazýváme (konečný nebo nekonečný) rozdíl

$$\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x$$

Lebesgueovým integrálem funkce $f(x)$ na množině E a značíme symbolem

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{32.1}$$

32.2. Definice. Funkce $f(x)$ se nazývá integrovatelnou (L) nebo integrace schopnou na množině E, jestliže integrál $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je konečný.

32.3. Poznámka. Množina všech integrovatelných funkcí se obvykle značí písmenem L, takže fakt integrovatelnosti funkce $f(x)$ můžeme také zapsat takto: $f(x) \in L$, resp. $L(E)$, chceme-li vyznačit množinu, přes kterou integrujeme.

32.4. Věta. *Aby měřitelná funkce $f(x)$ byla integrovatelná, je nutné a stačí, aby byla integrovatelnou funkce $|f(x)|$. Je-li tato podmínka splněna, potom*

$$\left| \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

32.5. Důsledky. I. *Integrovatelná funkce je skoro všude konečná.*
II. *Je-li* $\operatorname{meas} E = 0$, *potom na E je integrovatelná každá funkce $f(x)$ a platí*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

III. *Funkce integrovatelná na množině E je integrovatelná i na každé její měřitelné podmnožině.*
IV. *Nechť funkce $f(x)$ a $F(x)$ jsou měřitelné na množině E a nechť $|f(x)| \le F(x)$. Je-li funkce $F(x)$ integrovatelná, tak je integrovatelná i funkce $f(x)$.*

32.6. Věta. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou ekvivalentní. Z existence jednoho z integrálů $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_E g(x)\,\mathrm{d}x$ plyne existence druhého a jejich rovnost.*

32.7. Věta (konečná aditivnost integrálu). *Nechť množina E je sjednocením konečného počtu navzájem disjunktních měřitelných množin*

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \ne j).$$

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na každé z množin E_k, tak je integrovatelná i na jejich sjednocení a platí

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V případě spočetně mnoha množin neplyne z integrovatelnosti funkce $f(x)$ na každé množině její integrovatelnost na jejich sjednocení, jak ukazuje tento příklad.

32.8. Příklad. Nechť funkce $f(x)$ je dána na $(0,1\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} -n & \text{pro } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ n & \text{pro } \frac{2n+1}{2n(n+1)} < x \le \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)\,.$$

Funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém polosegmentu $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle$, přičemž

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{2n+1}{2n(n+1)}} n\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2n+1}{2n(n+1)}}^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Přitom na sjednocení $(0,1\rangle$ těchto polosegmentů není funkce $f(x)$ integrovatelná, protože (věta 32.4)

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty\,.$$

Platí však následující věty o totální aditivnosti integrálu.

32.9. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E, která je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení spočetné množiny navzájem disjunktních měřitelných množin,*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j),$$

potom

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{32.2}$$

32.10. Věta. *Nechť měřitelná množina E je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin E_k. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na každé množině E_k a jestliže*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\,,$$

potom funkce $f(x)$ je integrovatelná na množině E a platí rovnice (32.2).

32.11. Poznámka. Jak je vidět z příkladu 32.8, nelze zaměnit podmínky věty 32.10 podmínkou konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32.12. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E a k je konečná konstanta, potom funkce $kf(x)$ je také integrovatelná na E a platí*

$$\int_E kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32.13. Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E a $\varphi(x)$ měřitelná a ohraničená na této množině, pak jejich součin $\varphi(x)f(x)$ je integrovatelná funkce na E.*

32.14. Věta. *Je-li každá z funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ integrovatelná na množině E, potom je integrovatelná i funkce $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, přičemž*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32.15. Věta (absolutní spojitost integrálu). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na množině E. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každou měřitelnou množinu $e \subset E$ s mírou $\operatorname{meas} e < \delta$ platí*

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

33. Limitní přechod za znakem integrálu

33.1. Věta (Lebesgue). *Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost měřitelných funkcí $|\{f_n(x)\}$, která konverguje na této množině téměř všude k funkci $F(x)$. Existuje-li taková integrovatelná funkce Φ, že pro všechna n i $x \in E$ platí*

$$|f_n(x)| \le \Phi(x)\,,$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E F(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

33.2. Důsledek. *V podmínkách věty je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \varphi(x) F(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $\varphi(x)$ je libovolná měřitelná ohraničená funkce.

34. Základní vlastnosti kvadraticky integrovatelných funkcí

V této a několika následujících kapitolách budeme uvažovat velmi důležitou třídu funkcí – funkce s integrovatelným kvadrátem. Kvůli jednoduchosti budeme předpokládat, že všechny uvažované funkce jsou zadány na nějakém segmentu $E = \langle a, b \rangle$.

Případ, kdy funkce jsou definovány na libovolné měřitelné množině $E_0 \subset E = \langle a, b \rangle$, může být převeden na předchozí případ, když každou uvažovanou funkci dodefinujeme nulou v bodech množiny $E - E_0$.

34.1. Definice. Měřitelná funkce $f(x)$ se nazývá *kvadraticky integrace schopnou funkcí*, jestliže

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

Množinu všech kvadraticky integrovatelných funkcí značíme obvykle[2] L_2.

34.2. Věta. *Každá funkce, která je kvadraticky integrovatelná, je integrovatelná, tj. $L_2 \subset L$.*

Tato věta plyne z evidentní nerovnosti

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}(1 + f^2(x))\,.$$

Stejně tak z nerovnosti

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$$

plyne

34.3. Věta. *Součin dvou funkcí kvadraticky integrovatelných je integrovatelná funkce.*

Odtud v důsledku rovnosti

$$(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2$$

plyne

[2] Někdy, aby se zdůraznilo o jaký interval (a, b) se jedná, píše se $L_2(a, b)$.

34.4. Věta. *Součet a rozdíl funkcí, které patří do L_2, náleží do L_2.*

Nakonec uveďme zcela zřejmou skutečnost, že současně s $f(x)$ do L_2 patří i všechny funkce tvaru $kf(x)$, kde k je konečné reálné číslo.

34.5. Věta (Buňakovského nerovnost). *Jestliže $f(x) \in L_2$ a $g(x) \in L_2$, potom*

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right] \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{34.1}$$

Důkaz. Uvažujme kvadratický trojčlen

$$\psi(u) = Au^2 + 2Bu + C$$

s reálnými koeficienty A, B, C, přičemž $A > 0$. Je-li tento trojčlen nezáporný při všech reálných hodnotách u, potom

$$B^2 \leq AC\,. \tag{34.2}$$

Skutečně, kdyby tomu tak nebylo, potom

$$\psi\Big(-\frac{B}{A}\Big) = \frac{1}{A}(AC - B^2) < 0\,.$$

Položme nyní

$$\psi(u) = \int_a^b [uf(x) + g(x)]^2\,\mathrm{d}x = u^2\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x + 2u\int_a^b fg\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2\,\mathrm{d}x.$$

Tento trojčlen je nezáporný, a proto jeho koeficienty splňují nerovnost (34.2), což je v tomto případě nerovnost (34.1).[3] □

34.6. Důsledek. *Jestliže $f(x) \in L_2$, potom*

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,. \tag{34.3}$$

Důkaz. Položíme-li $g(x) \equiv 1$ v (34.1) a nahradíme-li $f(x)$ výrazem $|f(x)|$, dostaneme nerovnost (34.3). □

34.7. Věta (Cauchyova nerovnost). *Jestliže $f(x) \in L_2$ a $g(x) \in L_2$, potom*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,\mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Důkaz. Odmocníme-li obě strany Buňakovského nerovnosti (34.1), nalezneme

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

[3] Předpokládáme, že $\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x > 0$. V případě $\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x = 0$ by funkce $f(x)$ byla ekvivalentní nule a nerovnost (34.1) by degenerovala v triviální totožnost $0 = 0$.

Násobíme-li tuto nerovnost dvěma a přičteme-li k oběma stranám výraz

$$\int_a^b f^2 \,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2 \,\mathrm{d}x,$$

dostaneme

$$\int_a^b (f+g)^2 \,\mathrm{d}x \leq \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x}\right)^2.$$

Odtud již plyne tvrzení věty. $\square$

Cauchyova nerovnost dovoluje uvažovat množinu L_2 z nového hlediska. Konkrétně, jestliže přiřadíme každé funkci $f(x) \in L_2$ číslo

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x}\,,$$

tak bude platit:

I. $\|f\| \geq 0$, přičemž $\|f\| = 0$ tehdy a jen tehdy, když $f(x) \sim 0$.

II. $\|kf\| = |k| \cdot \|f\|$ a mimo jiné $\|-f\| = \|f\|$.

III. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Číslo $\|f\|$ se nazývá *normou* funkce $f(x)$. Analogie mezi $\|f\|$ a absolutní hodnotou $|x|$ reálného čísla bije do očí. Tato analogie je zdrojem řady důležitých a krásných konstrukcí.

Zhruba řečeno, základní význam absolutní hodnoty v matematické analýze spočívá v tom, že s její pomocí provádíme měření vzdáleností na číselné přímce:

$$\varrho(x,y) = |x-y|\,.$$

Zavedení normy dovoluje hledět i na množinu $L_2(a,b)$ jako na nějaký „prostor“, v kterém je také možno provádět měření, jestliže přijmeme číslo

$$\varrho(f,g) = \|f-g\|$$

za vzdálenost mezi prvky f a g množiny L_2.

Jestliže se dohodneme považovat ekvivalentní funkce za totožné, potom vzdálenost $\varrho(f,g)$ bude mít vlastnosti, na které jsme zvyklí:

1. $\varrho(f,g) \geq 0$, přičemž $\varrho(f,g) = 0$, když a jen když $f = g$.
2. $\varrho(f,g) = \varrho(g,f)$.
3. $\varrho(f,g) \leq \varrho(f,h) + \varrho(h,g)$.

Jestliže na některé množině A, jejíž prvky jsou zcela libovolného původu, je zadána jakákoliv funkce $\varrho(x,y)$, která je definována pro všechny dvojice x, $y \in A$, potom množinu A nazýváme *metrickým prostorem.*

To znamená, že L_2 je metrický prostor. Jako první tento způsob nazírání na L_2 začal rozvíjet D. Hilbert; to je také důvod, proč se L_2 nazývá *Hilbertovým prostorem* (i když písmeno L v symbolu L_2 je užíváno na počest Lebesguea; proto tento prostor budeme také nazývat *Lebesgueovým prostorem*).

35. Konvergence podle středu

Pojem normy dovoluje zavést v Hilbertově prostoru L_2 pojem limity pomocí téměř stejných výrazů jako v případě číselné přímky.

35.1. Definice. Prvek f prostoru L_2 se nazývá *limitou* posloupnosti $\{f_n\}$ prvků tohoto prostoru, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ je $\|f_n - f\| < \varepsilon$.

Tuto skutečnost budeme označovat tím, že budeme říkat, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje* k prvku f, nebo že prvek f_n se *blíží* k f a zapisovat obvyklým způsobem

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f\,, \quad f_n \to f\,.$$

Zde musíme upozornit čtenáře na hluboký rozdíl vztahů

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{a} \quad f_n \to f\,.$$

První znamená, že při pevném x *číselná* posloupnost $\{f_n(x)\}$ v obvyklém smyslu konverguje k číselné limitě $f(x)$. Druhý vztah znamená, že posloupnost prvků prostoru L_2 konverguje k prvku $f \in L_2$ ve smyslu právě uvedené definice 35.1. V obyčejných termínech teorie funkcí vztah $f_n \to f$ znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Tento nový druh konvergence posloupnosti funkcí se nazývá *konvergence podle středu.*

35.2. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje podle středu k funkci $f(x)$, potom k této funkci konverguje i podle míry.*

Důkaz. Nechť $\sigma > 0$ a

$$A_n(\sigma) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}\,.$$

Potom

$$\int_a^b (f_n - f)^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2 \,\mathrm{d}x \geq \sigma^2 \operatorname{meas} A_n(\sigma)\,,$$

a protože σ je pevně zvoleno, tak $\operatorname{meas} A_n(\sigma) \to 0$, a to značí, že $f_n \Longrightarrow f$. □

35.3. Důsledek. *Jestliže posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje podle středu k funkci $f(x)$, potom je z ní možno vydělit podposloupnost $\{f_{n_k}(x)\}$ konvergující k $f(x)$ téměř všude.*

Tento důsledek je možno získat pouhým srovnáním právě dokázané věty 35.2 s Rieszovou větou z hlavy IV (viz větu 22.5). Můžeme jej však dokázat bez jakéhokoliv užití konvergence podle míry: Jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n - f)^2 \,\mathrm{d}x = 0\,,$$

potom lze najít takové indexy $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, že

$$\int_a^b (f_{n_k} - f)^2 \,\mathrm{d}x < \frac{1}{2^k}\,.$$

Potom nekonečná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (f_{n_k} - f)^2 \, \mathrm{d}x$$

konverguje, takže podle důsledku 31.18 téměř všude na $\langle a, b \rangle$ platí

$$f_{n_k}(x) \to f(x) .$$

Poznamenejme, že konvergence podle středu posloupnosti $\{f_n(x)\}$ k funkci $f(x)$ neimplikuje konvergenci $\{f_n(x)\}$ k $f(x)$ téměř všude. To lze ilustrovat příkladem.

Podobně, konvergence $f_n(x) \to f(x)$ v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$ neimplikuje konvergenci podle středu, jak ukazuje následující příklad.

35.4. Příklad. Nechť na $\langle 0, 1 \rangle$ je dána posloupnost $\{f_n(x)\}$ vztahy

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{pro ostatní body } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Potom zřejmě pro libovolné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 ,$$

ale přitom

$$\int_0^1 f_n^2(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 \, \mathrm{d}x = n \to +\infty .$$

Avšak: $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n \to f$.

35.5. Věta (Jednoznačnost limity). *Posloupnost $\{f_n\} \subset L_2$ může mít pouze jednu limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f_n \to f$, $f_n \to g$. Potom

$$\|f - g\| \le \|f - f_n\| + \|f_n - g\| ,$$

a protože pravá strana této nerovnosti konverguje k nule a levá je konstantní a nezáporná, tak $\|f - g\| = 0$. Odtud $f - g = 0$ a $f = g$, což jsme chtěli dokázat.

Můžeme dát i jiný důkaz této věty: Jestliže $f_n \to f$ a $f_n \to g$, potom podle věty 35.2 posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje podle míry jak k $f(x)$, tak k $g(x)$, takže $f(x) \sim g(x)$ a ekvivalentní funkce jsme se dohodli považovat za jediný prvek prostoru L_2. □

35.6. Věta (Spojitost normy). *Jestliže $f_n \to f$, potom $\|f_n\| \to \|f\|$.*

Důkaz. Ze zřejmých nerovností

$$\|f_n\| \le \|f\| + \|f_n - f\| , \quad \|f\| \le \|f_n\| + \|f_n - f\|$$

plyne, že

$$\big| \|f_n\| - \|f\| \big| \le \|f_n - f\|$$

a odtud plyne tvrzení věty. □

35.7. Důsledek. *Normy členů konvergentní posloupnosti $\{f_n\}$ jsou ohraničené.*

35.8. Definice. Posloupnost $\{f_n\}$ bodů prostoru L_2 se nazývá *cauchyovská* (konvergentní v sobě, fundamentální), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N(\varepsilon)$, že pro $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ platí

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon\,.$$

35.9. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ má limitu, potom je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $f_n \to f$. Zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, lze nalézt takové $N(\varepsilon)$, že při $n > N(\varepsilon)$ bude

$$\|f_n - f\| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Jestliže nyní $n > N(\varepsilon)$ a $m > N(\varepsilon)$, potom

$$\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_m\|\,,$$

což dokazuje tvrzení věty. □

Mnohem hlubší je obrácená věta:

35.10. Věta (Fischer). *Je-li posloupnost $\{f_n\} \subset L_2$ cauchyovská, potom je konvergentní.*

Důkaz. Větu dokážeme v případě libovolné ohraničené měřitelné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$; tedy platí i v případě $\mathbb{R}^1$. Nechť $\{f_n\} \subset L_2(\Omega)$ je libovolně zvolená cauchyovská posloupnost, tj.

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{L_2(\Omega)} = 0\,, \tag{35.1}$$

což znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že $\|f_n - f_m\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$ pro všechna $m, n \ge n_0(\varepsilon)$. Máme dokázat existenci takové funkce $f \in L_2(\Omega)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{35.2}$$

Vztah (35.1) implikuje existenci posloupnosti $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových přirozených čísel, že

$$N_1 < N_2 < \dots$$

a

$$\|f_n - f_{N_k}\|_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{2^k} \quad \forall n \ge N_k\,. \tag{35.3}$$

Položme

$$g_k := f_{N_k}\,, \tag{35.4}$$

$$h_n := \sum_{j=n}^{\infty} |g_{j+1} - g_j|\,. \tag{35.5}$$

Zřejmě

$$g_n \in L_2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{35.6}$$

$$\|g_{n+1} - g_n\|_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{35.7}$$

vztah (35.7) platí vzhledem k (35.3).

Protože norma je spojitý funkcionál, můžeme psát podle (35.5), trojúhelníkové nerovnosti a (35.7), že

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{L_2(\Omega)} &= \Big\| \Big(\sum_{j=n}^{\infty} |g_{j+1} - g_j| \Big) \Big\|_{L_2(\Omega)} = \Big\| \lim_{r\to\infty} \Big(\sum_{j=n}^{r} |g_{j+1} - g_j| \Big) \Big\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \lim_{r\to\infty} \Big\| \Big(\sum_{j=n}^{r} |g_{j+1} - g_j| \Big) \Big\|_{L_2(\Omega)} \le \lim_{r\to\infty} \sum_{j=n}^{r} \|g_{j+1} - g_j\|_{L_2(\Omega)} < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j}\,; \end{aligned} \tag{35.8}$$

odtud

$$\|h_n\|_{L_2(\Omega)} < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

což implikuje

$$h_n \in L_2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{35.9}$$

Položme

$$A_n := \{X \in \Omega : |g_n(X)| = +\infty\}, \quad B_n := \{X \in \Omega : h_n(X) = +\infty\},$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)\,.$$

Měřitelná funkce je téměř všude konečná; odtud podle (35.6) a (35.9) plyne measA_n = meas$B_n = 0$. Tudíž

$$\text{meas} E = 0\,. \tag{35.10}$$

Podle (35.5)

$$h_n(X) = |g_{n+1}(X) - g_n(X)| + h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega\,.$$

Tedy

$$h_n(X) \ge h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E,$$

$$h_{n+1}(X) - h_n(X) = -|g_{n+1}(X) - g_n(X)| \le g_{n+1}(X) - g_n(X) \quad \forall X \in \Omega.$$

Poslední vztah implikuje

$$g_n(X) - h_n(X) \le g_{n+1}(X) - h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.11}$$

Dále platí podle (35.5)

$$\begin{aligned} g_n + h_n &= g_n + |g_{n+1} - g_n| + \sum_{j=n+1}^{\infty} |g_{j+1} - g_j| = \\ &= g_n + |g_{n+1} - g_n| + h_{n+1} \ge g_{n+1} + h_{n+1}\,, \end{aligned}$$

protože $|g_{n+1} - g_n| \ge g_{n+1} - g_n$. Tedy

$$g_{n+1}(X) + h_{n+1}(X) \le g_n(X) + h_n(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.12}$$

Definujme funkce

$$G_n(X) = \begin{cases} g_n(X) - h_n(X), & \text{if } X \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{if } X \in E, \end{cases} \tag{35.13}$$

$$H_n(X) = \begin{cases} g_n(X) + h_n(X), & \text{if } X \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{if } X \in E. \end{cases} \tag{35.14}$$

Vztahy (35.6) a (35.9) implikují

$$G_n, H_n \in L_2(\Omega) . \tag{35.15}$$

Protože $h_j(X) \geq 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$, platí

$$g_{n+1}(X) - h_{n+1}(X) \leq g_{n+1}(X) + h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.16}$$

Ze vztahů (35.11) – (35.14) a (35.16) plyne

$$G_1(X) \leq G_n(X) \leq G_{n+1}(X) \leq H_{n+1}(X) \leq H_n(X) \leq H_1(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E . \tag{35.17}$$

Tedy pro každý bod $X \in \Omega \setminus E$ je posloupnost čísel $\{G_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená a neklesající; tedy má limitu. Položíme

$$f(X) := \lim_{n\to\infty} G_n(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E . \tag{35.18}$$

Podle (35.15) a (35.17) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechny body $X \in \Omega \setminus E$

$$|G_n(X)|^2 \leq (|G_1(X)| + H_1(X))^2 \in L_1(\Omega) . \tag{35.19}$$

Protože druhá mocnina je spojitá funkce, máme podle (35.18)

$$[f(X)]^2 = [\lim_{n\to\infty} G_n(X)]^2 = \lim_{n\to\infty} [G_n(X)]^2 \quad \forall X \in \Omega \setminus E . \tag{35.20}$$

Podle (35.19), (35.18) a Lebesgueovy věty o limitním přechodu za znakem integrálu (viz Větu 33.1) dostáváme, že $\|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty$; odtud

$$f \in L_2(\Omega) . \tag{35.21}$$

Kromě toho, podle (35.17) a (35.18),

$$G_n(X) \leq f(X) \leq H_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N} . \tag{35.22}$$

Vztah (35.22) plyne z těchto úvah: Zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Potom podle (35.17)

$$G_n(X) \leq G_{n+r}(X) \leq H_{n+r}(X) \leq H_n(X) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \ X \in \Omega \setminus E.$$

Nyní stačí přejít k limitě pro $r \to \infty$ a užít (35.18).

Vztahy (35.22) implikují

$$G_n(X) - g_n(X) \le f(X) - g_n(X) \le H_n(X) - g_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

tento výsledek může být psán vzhledem k (35.13), (35.14) ve tvaru

$$-h_n(X) \le f(X) - g_n(X) \le h_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Avšak to znamenená, že

$$|f(X) - g_n(X)| \le h_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.23}$$

Podle (35.23) a (35.8)

$$\|f - g_n\|_{L_2(\Omega)} \le \|h_n\|_{L_2(\Omega)} < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 \cdot 2^{-n}.$$

Z tohoto výsledku a vztahů (35.3), (35.4) plyne

$$\|f - f_n\|_{L_2(\Omega)} \le \|f - g_j\|_{L_2(\Omega)} + \|g_j - f_n\|_{L_2(\Omega)} \le 3 \cdot 2^{-j} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

což dokazuje (35.2). Fischerova věta je dokázána. $\square$

Předchozí úvahy také implikují: *Existuje podposloupnost posloupnosti* $\{f_n\} \subset L_2(\Omega)$ (*definovaná zde pomocí* (35.4)) *která konverguje k funkci* $f \in L_2(\Omega)$ *téměř všude v* Ω.

Vlastnost Hilbertova prostoru L_2 vyjádřená ve větě 35.10 se nazývá *úplnost* tohoto prostoru. Čtenář možná postřehl, že věty 35.9 a 35.10 jsou analogií známého Bolzano-Cauchyova příznaku konvergence. Bolzano-Cauchyův příznak je jedna z forem spojitosti číselné přímky $\mathbb{R}^1$. Tuto vlastnost je možno vyjádřit libovolným z následujících tvrzení:

A. Jsou-li body přímky $\mathbb{R}^1$ rozděleny na dvě třídy X a Y tak, že každý bod třídy X leží nalevo od každého bodu třídy Y, potom buď v třídě X je nejpravější bod, nebo v třídě Y je nejlevější bod.

B. Shora ohraničená množina má supremum.

C. Monotonně rostoucí a shora ohraničená posloupnost (proměnná) má konečnou limitu.

D. Je-li $\{d_n\}$ posloupnost do sebe vložených segmentů, jejichž délky konvergují k nule, potom existuje bod, který náleží všem segmentům.

E. Bolzano-Cauchyův příznak: cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ má konečnou limitu.

Stačí odebrat z přímky $\mathbb{R}^1$ jediný bod, aby všechny tyto věty přestaly platit.

Z vět **A, B, C, D, E** pouze poslední, tj. **E**, je zformulována bez pomoci pojmu o *pořádku* bodů na přímce. Proto je přirozené, aby právě ona byla přenesena jako charakteristika spojitosti prostoru na případ prostorů složitějších než číselná přímka.

35.11. Definice. Množina $A \subset L_2$ se nazývá *všude hustá* v L_2, jestliže každá funkce náležející do L_2 je limitou (ve smyslu konvergence podle středu) nějaké posloupnosti funkcí množiny A.

35.12. Poznámka. Snadno vidíme, že aby množina $A = \{g\}$ byla všude hustá v L_2, je nutné a stačí, aby ke každé funkci $f \in L_2$ a každému $\varepsilon > 0$ bylo možno najít takovou funkci $g \in A$, že $\|f - g\| < \varepsilon$.

35.13. Věta. *Každá ze tříd funkcí*
M – třída měřitelných ohraničených funkcí,
C – třída spojitých funkcí,
P – třída polynomů,
S – třída stupňovitých funkcí
je všude hustá v $L_2(a,b)$. Jestliže pro základní segment platí $\langle a,b\rangle = \langle -\pi,\pi\rangle$, potom je všude hustá i třída
T – třída trigonometrických polynomů.

Důkaz. Dokážeme pouze první dvě tvrzení. Důkazy zbývajících tvrzení nalezne čtenář v [Na].

A) Nechť $f(x) \in L_2(a,b)$. K libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ najdeme (vzhledem k absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu – viz větu 32.15) takové $\delta > 0$, že vztahy $e \subset \langle a,b\rangle$, $\operatorname{meas} e < \delta$ implikují

$$\int_e f^2(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon^2 .$$

Podle věty 23.1 ke každému $\delta > 0$ lze najít takovou měřitelnou ohraničenou funkci $g(x)$, že $\operatorname{meas}\{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\} < \delta$, přičemž je možno předpokládat, že $g(x) = 0$ v bodech množiny $\{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\}$. Tedy

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b (f-g)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E\colon f(x)\neq g(x)\}} (f-g)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E\colon f(x)\neq g(x)\}} f^2\,\mathrm{d}x < \varepsilon^2 ,$$

tj.

$$\|f - g\| < \varepsilon .$$

Tím je věta dokázána pro třídu M.

B) Nechť $f(x) \in L_2(a,b)$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme takovou funkci $g(x) \in M$, že

$$\|f - g\| < \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Nechť $|g(x)| \le K$. Podle Luzinovy věty (viz větu 23.9) existuje taková spojitá funkce $\varphi(x)$, že

$$\operatorname{meas}\{x \in E\colon \varphi(x) \neq g(x)\} < \tfrac{\varepsilon^2}{16K^2}, \quad |\varphi(x)| \le K .$$

Pro tuto funkci bude

$$\|\varphi - g\|^2 = \int_a^b (\varphi - g)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E\colon \varphi(x)\neq g(x)\}} (\varphi(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le 4K^2 \cdot \operatorname{meas}\{x \in E\colon \varphi(x) \neq g(x)\} < \tfrac{\varepsilon^2}{4} ,$$

odkud $\|\varphi - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$, takže $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána pro třídu C. □

V mnohých problémech hraje vážnou roli pojem *slabé konvergence* posloupnosti funkcí.

35.14. Definice. Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\} \subset L_2(a,b)$ se nazývá *slabě konvergentní* k funkci $f(x) \in L_2(a,b)$, jestliže rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

platí pro každou funkci $g \in L_2(a,b)$.

Podrobněji se tímto pojmem nebudeme zabývat; zde uvedeme pouze jednu větu.

35.15. Věta. *Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\} \subset L_2(a,b)$ konverguje podle středu k funkci $f \in L_2(a,b)$, potom k ní konverguje i slabě.*

Důkaz. Nechť $g \in L_2(a,b)$. Potom Buňakovského nerovnost implikuje

$$\left\{ \int_a^b g(x)[f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \right\}^2 \leq \left\{ \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \right\} \left\{ \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,\mathrm{d}x \right\},$$

odkud

$$\left| \int_a^b g f_n\,\mathrm{d}x - \int_a^b g f\,\mathrm{d}x \right| \leq \|g\| \cdot \|f_n - f\| \to 0\,,$$

což jsme chtěli dokázat. □

36. Věta o substituci v Lebesgueově integrálu

Větu uvedeme v případě vícerozměrných integrálů (i když tyto budou definovány později).

36.1. Definice. Nechť zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je definováno vztahy

$$x_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_N), \ldots, x_N = f_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)\,.$$

Říkáme, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je *regulární* na množině $G \subset \mathbb{R}^N$, jestliže

a) G je otevřená množina;

b) derivace $\partial f_i / \partial \xi_j$ $(i,j = 1, \ldots, N)$ jsou konečné a spojité v G;

c) Jakobián $J(\xi) = D(f_1, \ldots, f_N)/D(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ je různý od nuly pro všechny body $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_N] \in G$. (V případě $N = 1$ pro Jakobián platí $J(\xi_1) = f_1'(\xi_1)$.)

36.2. Věta (o substituci v Lebesgueově integrálu). *Nechť zobrazení*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

je injektivní a regulární v množině $G \subset \mathbb{R}^N$. Nechť $D = \mathbf{f}(G)$ a nechť $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$ je libovolná funkce měřitelná na D. Potom

$$\int_D F(X)\,\mathrm{d}X = \int_G F(\mathbf{f}(\xi)) |J(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \tag{36.1}$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje. (*V* (36.1) *symbol X značí libovolný N-rozměrný bod množiny D.*)

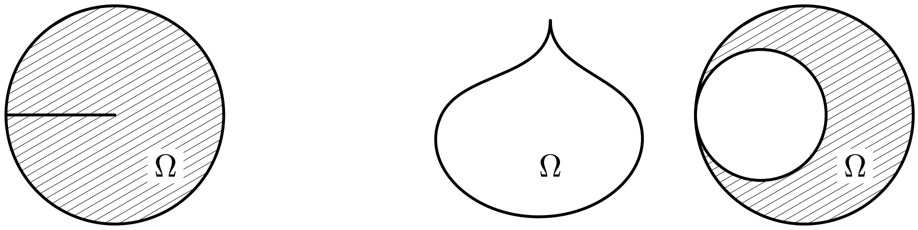
36.3. Poznámka. V případě $N = 1$ je $D = (a,b) = (f(\alpha), f(\beta))$ a $G = (\alpha, \beta)$ a vztah (36.1) se zjednodušuje na tvar

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F(f(t)) |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{36.2}$$

který opět platí za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje. (V (36.2) místo $\mathbf{f}$ píšeme f, místo x_1 pro jednoduchost x a místo ξ_1 skalární proměnnou t.)

37.1. Definice. Říkáme, že dvojrozměrná ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$, jestliže v téměř všech bodech $\partial\Omega$ existuje *vnější* normála k Ω a jestliže se $\partial\Omega$ skládá z konečného počtu hladkých částí.

Poznámka. V případě hranice $\partial\Omega$ z definice 37.1 jsou vyloučeny řezy (viz Obr. 37.1 pro $\dim\Omega = 2$); nejsou však vyloučeny body vratu (viz Obr. 37.2 opět pro $\dim\Omega = 2$). Oblast Ω může také být vícenásobně souvislá.



Obr. 37.1 a Obr. 37.2a a 37.2b

37.2. Greenova věta. *Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť P, Q jsou funkce spojité v $\overline{\Omega}$, které mají spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť hranice $\partial\Omega$ je orientována tak, že při jejím probíhání ve směru orientace máme oblast Ω po levé ruce. Potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{37.1}$$

kde integrály jsou brány v Riemannově smyslu.

Důkaz. Větu pro její důležitost dokážeme. Důkaz bude rozdělen do částí **A** – **E**.

A) Omezíme-li se v předchozí formulaci na *konvexní* ohraničenou dvojrozměrnou oblast Ω, dostaneme *elementární tvar Greenovy věty*, který se dokazuje v základních kursech matematické analýzy a který proto nebudeme dokazovat.

B) Každou ohraničenou uzavřenou (obecně vícenásobně souvislou) dvojrozměrnou oblast $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu konvexních uzavřených oblastí s polygonální hranicí, které mají navzájem disjunktní vnitřky.

Analogická věta platí i v $\mathbb{R}^3$ a důkaz (jak v $\mathbb{R}^2$, tak $\mathbb{R}^3$) je částí důkazu mnohem obecnější věty (viz [Kř]).

V případě $\mathbb{R}^2$ uvedené tvrzení ve většině případů plyne z názoru, protože téměř každou ohraničenou uzavřenou (obecně vícenásobně souvislou) dvojrozměrnou oblast Ω s polygonální hranicí lze snadno ztriangulovat (tj. rozdělit na konečný počet uzavřených trojúhelníků tak, že každé dva trojúhelníky jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu. Tvrzení pak plyne z toho, že každý trojúhelník je konvexní.

C) Tvrzení z části **A)** lze nyní snadno rozšířit na případ, že $\overline{\Omega}$ je ohraničená uzavřená (obecně vícenásobně souvislá) dvojrozměrná oblast $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí.

Abychom to dokázali, vyjádřeme $\overline{\Omega}$ ve tvaru

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_j,$$

kde $\overline{K}_1, \dots, \overline{K}_n$ jsou uzavřené konvexní oblasti s navzájem disjunktním vnitřky. Hranici ∂K_j každé této oblasti orientujme kladně (tj. proti smyslu chodu hodinových ručiček). Podle části **A)** pak platí pro $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\iint_{\overline{K}_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial K_j} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y.$$

Sečtěme nyní tento vztah od $j = 1$ do $j = n$. Na levé straně pak dostaneme dvojný integrál přes polygonální oblast $\overline{\Omega}$ a na pravé straně křivkový integrál druhého druhu přes $\partial\Omega$ (protože křivkové integrály přes úsečky ležící uvnitř Ω se navzájem vyruší: po každé vnitřní úsečce se integruje dvakrát, a to v opačných smyslech).

D) V [Fi, Dodatek] je dokázána přístupným způsobem tato věta, jejíž důkaz je metodickým zpracováním některých výsledků publikovaných v [He]:

Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast Ω má po částech hladkou hranici (ve smyslu Definice 37.1) bez bodů vratu. Potom lze každou funkci $f(x, y) \in C^m(\Omega)$ prodloužit do celé roviny $\mathbb{R}^2$ se zachováním třídy.

E) Nyní jsme připraveni dokázat Greenovu větu v plné obecnosti. Aproximujme proto danou oblast Ω nějakou oblastí Ω_h s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$, jejíž vrcholy leží na Ω. Tato aproximace může být hrubá; musí však mít tu vlastnost, že množina ohraničená křivkami $\partial\Omega$ a $\partial\Omega_h$ je sjednocením konvexních oblastí ve tvaru "srpečků" (tj. dvojúhelníků s jednou zakřivenou stranou, která je částí $\partial\Omega$, a druhou přímou stranou, která je jednou z úseček, z kterých je složena polygonální hranice $\partial\Omega_h$) – viz Obr. 37.4.

Podle části **C)** platí

$$\iint_{\overline{\Omega}_h} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega_h} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y,$$

kde $\widetilde{P}$ a $\widetilde{Q}$ jsou prodloužení funkcí P a Q podle věty z části **D)**. Tento vztah může být napsán ve tvaru

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{\Omega}_h} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial\Omega} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y + \\ &+ \int_{\partial\Omega_h} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{a}$$

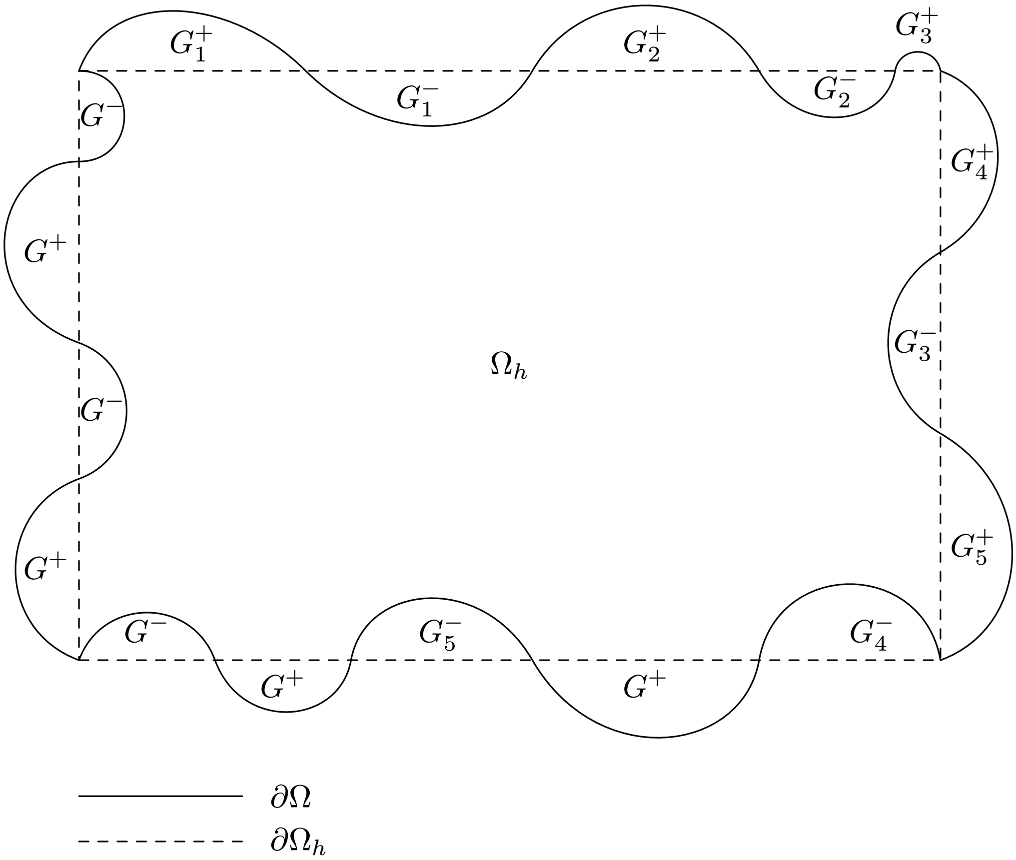


Fig. 37.4 Aproximace $\partial\Omega$ pomocí $\partial\Omega_h$

Srpečkové oblasti ležící vně Ω_h označíme symboly $G_{k_i}^+$, srpečkové oblasti ležící uvnitř Ω_h označíme symboly $G_{k_j}^-$. Platí

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_h} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y = \\ &= -\sum_i \int_{\partial G_{k_i}^+} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y + \sum_j \int_{\partial G_{k_j}^-} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y;\end{aligned} \tag{b}$$

hranice každé srpečkové oblasti je orientována v kladném smyslu – odtud plyne znaménko minus před prvním součtem na pravé straně vztahu (b). Podle Greenovy věty pro konvexní oblast (viz část **A)** platí

$$\int_{\partial G_k} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y = \iint_{G_k} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{c}$$

Poslední vztah, který potřebujeme, má tvar

$$\iint_{\Omega_h} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_i \iint_{G_{k_i}^+} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_j \iint_{G_{k_j}^-} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{d}$$

kde $\widetilde{F} := \partial\widetilde{Q}/\partial x - \partial\widetilde{P}/\partial y$. Kombinací vztahů (a) – (d) dostaneme (37.1).

Na tomto důkazu je překvapivé, že nepotřebujeme užít žádný limitní přechod od Ω_h k Ω pro $h \to 0$. To je možné pouze v dvojrozměrném případě. $\square$

37.3. Věta (divergenční tvar Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty $\mathcal{P}$.2. Položíme-li $P = -P_2$, 3$Q = P_1$, potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2)\, \mathrm{d}s, \tag{37.2}$$

kde (n_1, n_2) je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Náčrt důkazu. Platí (zhruba řečeno v první rovnosti)

$$\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (P_1 \sin\alpha - P_2 \cos\alpha)\, \mathrm{d}s, \tag{37.3}$$

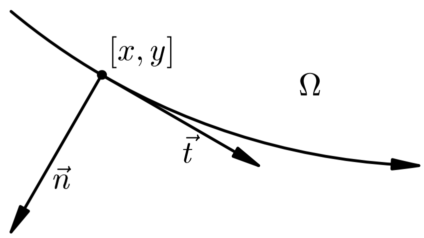
kde α je úhel, který svírá tečna k $\partial\Omega$ (orientovaná shodně s $\partial\Omega$) s kladným směrem osy x. Nechť ω je úhel, který svírá vnější normála k $\partial\Omega$ s kladným směrem osy x. Potom v bodě $[x, y]$ platí (viz Obr. 37.4)

$$\alpha = \omega + \frac{\pi}{2},$$

takže

$$\cos\alpha = -\sin\omega, \quad \sin\alpha = \cos\omega\,. \tag{37.4}$$

Dosazením (37.4) do (37.3) a kombinací získaného vztahu s (37.1), kde v levé straně užijeme značení $P = -P_2$, $Q = P_1$, dostaneme vztah (37.2). $\square$



Obr. 37.4

37.4. Označení. V dalším budeme též značit

$$x_1 := x, \quad x_2 := y \quad (\text{resp. } x_3 = z).$$

Místo $\iint_\Omega$ budeme psát $\int_\Omega$ a místo $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jenom $\mathrm{d}X$ ($\equiv \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$). Vztah (37.2) má potom tvar

$$\sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial P_k}{\partial x_k}\, \mathrm{d}X = \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega} P_k n_k\, \mathrm{d}s\,. \tag{37.5}$$

37.5. Věta (důsledek Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty 37.2. Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \, \mathrm{d}X = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j \, \mathrm{d}s - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, \mathrm{d}X \,. \tag{37.6}$$

Důkaz. Položme v (37.5) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. $\square$

37.6. Poznámka. Vztah (37.6) se dá také dokázat v případě trojrozměrné oblasti Ω. V tomto případě pak symbol $\int_{\partial\Omega} u\varphi n_j \, \mathrm{d}s$ znamená plošný integrál přes plošnou hranici $\partial\Omega$. Důkazová technika je v trojrozměrném případě o mnoho složitější, a proto v následujících položkách 37.6a – 37.6k uvedeme alespoň nejdůležitější pojmy a poznatky, které budeme potřebovat v kap. 38. Ostrogradského věta ve tvaru Věty 37.6i.

37.6a. Definice. a) Říkáme, že bodová množina $\bar{S}$ tvoří úsek plochy, který je regulární vzhledem k souřadné rovině (x, y), jestliže pro body $[x, y, z] \in \bar{S}$ platí

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in \bar{S}_{xy} \tag{37.6a}$$

kde $\bar{S}_{xy}$ je jednoduše souvislá dvojrozměrná ohraničená uzavřená oblast ležící v rovině (x, y), která je ohraničená jednoduchou, po částech hladkou uzavřenou křivkou ∂S_{xy}, a $f : \bar{S}_{xy} \to R^1$ je reálná funkce spojitá na $\bar{S}_{xy}$, která má spojité první parciální derivace $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ v S_{xy} (kde symbol S_{xy} značí vnitřek $\bar{S}_{xy}$, tj. $S_{xy} = \bar{S}_{xy} - \partial S_{xy}$; tyto derivace nemusejí být v S_{xy} ohraničené). Uzavřenou oblast $\bar{S}_{xy}$ nazýváme ortogonálním průmětem úseku $\bar{S}$ do roviny (x, y).

Množinu bodů $[x, y, z]$, pro které platí

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in \partial S_{xy},$$

nazýváme hranicí úseku $\bar{S}$ a značíme ∂S.

b) Podobně říkáme, že bodová množina $\bar{S}$ tvoří úsek plochy, který je regulární vzhledem k souřadné rovině (x, z), resp. (y, z), jestliže pro body $[x, y, z] \in \bar{S}$ platí

$$y = g(x, z), \quad [x, z] \in \bar{S}_{xz}, \tag{37.6b}$$

resp.

$$x = h(y, z), \quad [y, z] \in \bar{S}_{yz}, \tag{37.6c}$$

kde uzavřené oblasti $\bar{S}_{xz}$, $\bar{S}_{yz}$ a funkce $g : \bar{S}_{xz} \to R^1$, $h : \bar{S}_{yz} \to R^1$ mají analogické vlastnosti jako uzavřená oblast $\bar{S}_{xy}$ a funkce $f : \bar{S}_{xy} \to R^1$. Uzavřené oblasti $\bar{S}_{xz}$ a $\bar{S}_{yz}$ nazýváme ortogonálními průměty úseku $\bar{S}$ do rovin (x, z) a (y, z).

c) Místo pojmu úsek plochy budeme často užívat jenom výraz úsek.

d) Říkáme, že $\bar{S}$ je regulární úsek, je-li $\bar{S}$ regulární vzhledem k alespoň jedné souřadné rovině.

37.6b. Orientace normály regulárního úseku. Nechť (ξ, η) je ta z rovin (x, y), (x, z), (y, z), vůči níž je úsek $\bar{S}$ regulární; v případě, že je úsek $\bar{S}$ regulární vůči více souřadným rovinám, zvolíme za (ξ, η) jednu z nich. Nechť ζ je ta ze souřadných os x, y, z, která je různá od ξ a η. Nechť $\bar{V}$ je oblast, jejíž hranice ∂V je válcová plocha s řídící křivkou $\partial S_{\xi\eta}$ a povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou ζ. Úsek $\bar{S}$ dělí oblast $\bar{V}$ na dvě části, které označíme symboly $\bar{V}_1$ a $\bar{V}_2$ (pořadí číslování záleží buď na naší libovůli, nebo na povaze problému, s kterým orientace normály souvisí). V každém bodě $[x, y, z] \in \bar{S}$ orientujeme jednotkovou normálu $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ k úseku $\bar{S}$ ve směru z oblasti $\bar{V}_1$ do oblasti $\bar{V}_2$.

Je-li úsek $\bar{S}$ částí hranice $\partial\Omega$ oblasti $\bar{\Omega}$, potom je definice orientace normály jednodušší: Ve všech bodech $[x, y, z] \in \bar{S}$ míří normála $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ buď ven z $\bar{\Omega}$, nebo směrem do Ω.

Úhel, který svírá $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ s osou x, resp. y, resp. z budeme značit $\alpha(x, y, z)$, resp. $\beta(x, y, z)$, resp. $\gamma(x, y, z)$, nebo stručně α, resp. β, resp. γ. Platí tedy

$$\overrightarrow{n}(x, y, z) = (\cos\alpha(x, y, z), \cos\beta(x, y, z), \cos\gamma(x, y, z)).$$

37.6c. Věta (o normále). a) *Je-li úsek $\bar{S}$ regulární vzhledem k (x, y) a je popsán vztahem (8.1), potom v každém bodě $[x, y, z] \in S$ (kde S značí vnitřek $\bar{S}$) pro orientovanou jednotkovou normálu platí*

$$\overrightarrow{n}(x, y, z) = \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1),$$

či stručněji

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1),$$

kde $\varepsilon_z = 1$, jestliže $\gamma(x, y, z) < \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$, a $\varepsilon_z = -1$, jestliže $\gamma(x, y, z) > \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$. (Z (8.11) plyne, že v bodech $[x, y, z] \in S$ nemůže být $\gamma(x, y, z) = \frac{\pi}{2}$ a že ε_z je pro všechny vnitřní body úseku $\bar{S}$ stejné.)

b) *Je-li úsek $\bar{S}$ regulární vzhledem k (x, z) a je popsán vztahem (8.2), potom v každém bodě $[x, y, z] \in S$ pro orientovanou jednotkovou normálu platí*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_z^2}}(-g_x, 1, -g_z),$$

kde $\varepsilon_y = 1$, jestliže $\beta(x, y, z) < \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$, a $\varepsilon_y = -1$, jestliže $\beta(x, y, z) > \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$.

c) *Je-li úsek $\bar{S}$ regulární vzhledem k (y, z) a je popsán vztahem (8.3), potom v každém bodě $[x, y, z] \in S$ pro orientovanou jednotkovou normálu platí*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varepsilon_x}{\sqrt{1 + h_y^2 + h_z^2}}(1, -h_y, -h_z),$$

kde $\varepsilon_x = 1$, jestliže $\alpha(x, y, z) < \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$, a $\varepsilon_x = -1$, jestliže $\alpha(x, y, z) > \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$.

37.6d. Definice. a) Nechť úsek $\overline{S}$ je regulární vzhledem ke všem třem souřadným rovinám, nechť $\vec{n}(x,y,z)$ je jeho orientovaná jednotková normála a P,Q,R funkce spojité na $\overline{S}$. Klademe

$$\iint_{\overline{S}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z := \varepsilon_x \iint_{\overline{S}_{yz}} P(h(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{37.6d}$$

$$\iint_{\overline{S}} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z := \varepsilon_y \iint_{\overline{S}_{xz}} Q(x,g(x,z),z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z, \tag{37.6e}$$

$$\iint_{\overline{S}} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \varepsilon_z \iint_{\overline{S}_{xy}} R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{37.6f}$$

Integrály (37.6d)–(37.6f) nazýváme průmětovými plošnými integrály nebo plošnými integrály druhého druhu.

b) Za stejných předpokladů jako v a) označujeme:

$$\iint_{\overline{S}} (P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y) :=$$

$$:= \iint_{\overline{S}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\overline{S}} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint_{\overline{S}} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{37.6g}$$

Někdy se levá strana (37.6g) píše ve tvaru

$$\iint_{\overline{S}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

37.6e. Definice. Říkáme, že úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R), splňuje-li jednu ze tří následujících podmínek:

a) úsek $\overline{S}$ je regulární vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám;

b) ortogonální průmět úseku $\overline{S}$ do jedné ze tří souřadnicových rovin má plošnou míru rovnu nule; vzhledem ke zbývajícím dvěma souřadnicovým rovinám je úsek $\overline{S}$ regulární;

c) dvě složky vektoru $\vec{n}(x,y,z)$ jsou rovny nule pro všechny body $[x,y,z] \in \overline{S}$.

37.6f. Věta. *Nechť úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R), nechť $\vec{n}$ je jeho orientovaná jednotková normála a P,Q,R jsou tři funkce spojité na $\overline{S}$. Potom platí*

$$\iint_{\overline{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\overline{S}} (P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

37.6g. Věta. *Nechť úsek $\overline{S}$ je sjednocením n úseků s vlastností (R), které mají navzájem disjunktní vnitřky, $\vec{n}$ je jeho orientovaná jednotková normála a nechť P,Q,R jsou tři funkce spojité na $\overline{S}$. Potom můžeme položit*

$$\iint_{\overline{S}} (P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y) := \sum_{i=1}^{n} \iint_{\overline{S}^i} (P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

37.6h. Definice. Říkáme, že úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R^*), resp. vlastnost (R^{**}), jestliže splňuje podmínky a) – c), resp. podmínky a) – d), kde

a) úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R);

b) jsou-li

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z)$$

funkce z analytických vyjádření úseku $\overline{S}$ vzhledem k jednotlivým souřadnicovým rovinám, potom platí alespoň jedna ze tří relací $f \in C^2(\overline{S}_{xy})$, $g \in C^2(\overline{S}_{xz})$, $h \in C^2(\overline{S}_{yz})$;

c) je-li $\operatorname{meas}_2 S_{st} > 0$, potom je hranice ∂S_{st} po částech třídy C^2 a nemá body vratu;

d) alespoň jedna z rovinných oblastí $\overline{S}_{xy}$, $\overline{S}_{xz}$, $\overline{S}_{yz}$ je hvězdnou oblastí. (Oblast $\overline{D}$ je hvězdná, existuje-li alespoň jeden bod $Q \in D$ s vlastností, že každá polopřímka vycházející z tohoto bodu protne hranici ∂D právě v jednom bodě.)

37.6i. Věta (Ostrogradskij). *Nechť $\overline{\Omega}$ je trojrozměrná uzavřená ohraničená oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ nemá body vratu a je sjednocením konečného počtu úseků s vlastností (R^*), které mají navzájem disjunktní vnitřky. Nechť funkce P, Q, R, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ jsou spojité a ohraničené v nějaké ohraničené trojrozměrné oblasti $\widetilde{\Omega}$, pro kterou platí $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$. Nechť konečně normála k $\partial\Omega$ je orientována tak, že míří ven z oblasti Ω. Potom platí*

$$\iiint_{\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (P \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y). \quad (37.6\text{h})$$

Důkaz této věty je uveden v kap. 21.

37.6j. Věta (divergenční tvar Ostrogradského věty). *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 37.6i. Položme $P_1 = P$, $P_2 = Q$, $P_3 = R$. Potom*

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3) \,\mathrm{d}\sigma \qquad (37.6\text{i})$$

čili při značení ve stylu 37.4

$$\sum_{k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} \,\mathrm{d}X = \sum_{k=1}^{3} P_k n_k \,\mathrm{d}\sigma. \qquad (37.6\text{j})$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne z vět 37.6f, 37.6g a 37.6i. □

37.6k. Věta (důsledek Ostrogradského věty). *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 37.6i. Potom platí*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \,\mathrm{d}X = \int_{\partial\Omega} u v n_j \,\mathrm{d}\sigma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \,\mathrm{d}X. \qquad (37.6\text{k})$$

Důkaz. Položme v (37.6j) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. □

37.7. Definice ($C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} u$, $C_0^\infty(\Omega)$). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice se skládá z konečného počtu hladkých částí. Nechť $N = \dim \Omega$ a nechť $C^\infty(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ je lineál funkcí $u(X)$, kde $X = [x_1, \ldots, x_N]$, které jsou spojité včetně derivací všech řádů v celém prostoru $\mathbb{R}^N$.

1) Symbolem $C^\infty(\overline{\Omega})$ budeme značit lineál, který dostaneme restrikcí funkcí z $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ na uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$.

2) Uzávěr množiny těch bodů oblasti Ω, v nichž je $u(X) \neq 0$, nazýváme *nosičem* funkce $u(X)$ a značíme $\operatorname{supp} u$.

3) Označme dále symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ lineární prostor všech funkcí z $C^\infty(\overline{\Omega})$, pro něž platí $u(X) \equiv 0$ v určitém okolí hranice $\partial\Omega$ (v obecném případě různém pro různé funkce z $C_0^\infty(\Omega)$). Pro každé $u \in C_0^\infty(\Omega)$ je $\operatorname{supp} u$ *uzavřená* množina a $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, takže $\operatorname{supp} u$ má od hranice $\partial\Omega$ určitou kladnou vzdálenost, protože oblast Ω je *otevřená* souvislá množina.

37.7a. Poznámka. Připomínáme, že nekonečná množina M lineárního normovaného prostoru X se nazývá *kompaktní* (*v sobě*), jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset M$ obsahuje konvergentní podposloupnost v X (jejíž limita náleží do M). Dokazuje se, že *nutnou a postačující podmínkou* pro to, aby množina $M \subset X$ byla kompaktní, je, aby z *každého* pokrytí množiny M *otevřenými* množinami bylo možno vybrat *konečné podpokrytí*.[1] Podle této nutné a postačující podmínky můžeme každou kompaktní množinu $\operatorname{supp} \varphi$, kde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, pokrýt konečným počtem otevřených kruhů (resp. otevřených koulí) $K_1, \ldots, K_m$, jejichž uzávěry leží v Ω, $\overline{K}_j \subset \Omega$ ($j = 1, \ldots, m$) (protože pokrytí otevřenými množinami je *libovolné*, lze za ně zvolit pokrytí otevřenými kruhy (koulemi), jejichž průměr je menší než $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \operatorname{supp} \varphi)$; odtud plyne, že $\overline{K}_j \subset \Omega$). Označme

$$\operatorname{cover} \varphi := \bigcup_{j=1}^{m} \overline{K}_j \,.$$

Platí $\operatorname{supp} \varphi \subset \operatorname{cover} \varphi$. Z definice (kompaktního) nosiče $\operatorname{supp} \varphi$ funkce φ plyne, že

$$\varphi(X) = 0 \quad \text{pro } X \in \operatorname{cover} \varphi - \operatorname{supp} \varphi \,.$$

Kromě této skutečnosti hranice $\partial(\operatorname{cover} \varphi)$ množiny $\operatorname{cover} \varphi$ je *po částech hladká a nemá body vratu*. Všechny tyto skutečnosti využijeme v kap. 38 (konkrétně v důkazu Lemmatu 38.5).

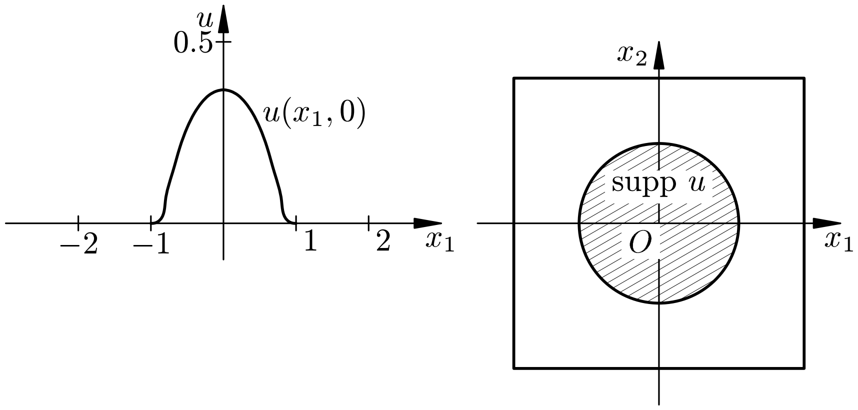
37.8. Příklad (funkce z $C_0^\infty(\Omega)$). Je-li $N = 2$ a je-li Ω čtverec definovaný nerovnostmi $-2 < x_1 < 2$, $-2 < x_2 < 2$, je příkladem funkce s kompaktním nosičem v Ω funkce

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x_1^2-x_2^2)} & \text{pro } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{37.14}$$

Přímým výpočtem se snadno dokáže, že funkce (37.14) má v Ω derivace všech řádů, takže je předně $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. (Pro názornost je na Obr. 37.4 nakreslen řez

[1] Tato podmínka se někdy bere přímo za definici kompaktní množiny. Takto pojatá definice je pak zaxiomatizováním Heine-Borelovy věty.

plochy (37.14) rovinou $x_2 = 0$.) Dále $\operatorname{supp} u$ je uzavřený kruh se středem v počátku souřadnic a poloměrem rovným jedné; jeho vzdálenost od hranice $\partial\Omega$ čtverce $\overline{\Omega}$ je zřejmě kladná (rovná jedné; viz Obr. 37.5).



Obr. 37.5 a Obr. 37.6

Důkaz tvrzení, že funkce (37.14) *náleží do* $C_0^\infty(\Omega)$. Pro lepší přehled užívejme v tomto důkazu symbol x, resp. y, místo x_1, resp. x_2. V tomto značení má funkce (37.14) vyjádření

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2-y^2)} & \text{pro } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{a}$$

Stačí dokázat toto: Je-li $A = [x_A, y_A] \in \partial\Omega$ libovolně zvolený bod a blížíme-li se z vnitřku Ω po libovolné cestě k A, tj.

$$(x,y) \to (x_A, y_A), \quad (x,y) \in \Omega,$$

potom limitní hodnota funkce $u(x,y)$ a všech jejích parciálních derivací libovolného řádu je rovna nule.

Přímým výpočtem snadno zjistíme, že pro $(x,y) \in \Omega$ platí

$$u(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \tag{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} \cdot \frac{-2y}{(1-x^2-y^2)^2}. \tag{c}$$

Abychom získali jakýsi řád pro vyjádření libovolné m-té parciální derivace funkce $u(x,y)$, napišme jak $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, tak $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ ve tvaru součinu tří funkcí

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) f_2(x,y) f_3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f_1(x,y) f_2(x,y) f_3(y), \tag{d}$$

kde

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \quad f_2(x,y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad f_3(\xi) = -2\xi\,. \tag{e}$$

Podle pravidla o derivaci součinu odtud dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4x^2}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8x^2}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \\ - \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \end{aligned} \tag{f}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8xy}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \tag{g}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4y^2}{(1-x^2-y^2)^4}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8y^2}{(1-x^2-y^2)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - - \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}. \tag{h}$$

Z (b), (c), (f) – (g) vidíme, že každá parciální derivace (prozatím do druhého řádu včetně) je součtem konečného počtu výrazů tvaru

$$P(x,y)f_1(x,y)G_m(x,y), \tag{i}$$

kde

$$P(x,y) = kx^iy^j \quad (i,j,k \in \mathbb{N}), \quad G_m(x,y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^m} \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{j}$$

a funkce $f_1(x,y)$ je dána vztahem (e_1). Snadno je vidět, že každá parciální derivace je součtem konečného počtu výrazů tvaru (i). Stačí tedy dokázat, že

$$\lim_{(x,y)\to(x_A,y_A)} P(x,y)f_1(x,y)G_m(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \Omega). \tag{k}$$

Za tím účelem zavedeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{l}$$

které nám umožní napsat pravou stranu vztahu (k) ve tvaru

$$\lim_{(x,y)\to(x_A,y_A)} P(x,y)f_1(x,y)G_m(x,y) = \lim_{\substack{r\to 1-\\ \varphi\to\varphi_A}} \left\{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)F_m(r)\right\}, \tag{m}$$

kde

$$F_m(r) = \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}}. \tag{n}$$

Podle (m), (n) platí

$$\lim_{\substack{r\to 1-\\ \varphi\to\varphi_A}} \left\{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)F_m(r)\right\} = P(\cos\varphi_A, \sin\varphi_A) \lim_{r\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}}. \tag{o}$$

Limitu stojící na pravé straně vztahu (o) snadno vypočítáme pomocí m-násobného užití l'Hospitalova pravidla. Matematickou indukcí zjistíme, že

$$\lim_{r\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}} = 0. \tag{p}$$

Ze vztahů (m) – (p) plyne

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_A,y_A)\\ (x,y)\in\Omega}} D^\alpha u(x,y) = 0 \quad \forall|\alpha| \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

čímž je důkaz tvrzení, že funkce ($\mathcal{P}$.14) náleží do $C_0^\infty(\Omega)$, ukončen. Zobecnění získaného výsledku pro $N = 3$ je (vzhledem k užití polárních souřadnic v důkazu) zřejmé. □

38. Zobecněné derivace. Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$

V této kapitole bude symbol $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ značit libovolnou ohraničenou oblast (tj. otevřenou souvislou množinu), jejíž hranice $\partial\Omega$ je po částech hladká ve smyslu Definice $\mathcal{P}.1$. Připouštíme vícenásobně souvislé oblasti.

38.1. Definice (multiindexové značení derivací). Nechť $N = \dim \Omega$. Multiindexem rozumíme N-rozměrný vektor, jehož složky jsou nezáporná celá čísla,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \quad \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_N \geq 0\,. \tag{38.1}$$

Celé číslo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

nazýváme délkou multiindexu. Symbol $D^\alpha u$ definovaný vztahem

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \tag{38.2}$$

pak nazýváme derivací v multiindexovém značení.

Příklad. Pro $N = 2,\ \alpha = (3,0)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \quad \Big(\text{a ne zbytečně komplikovaně } \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^0}\Big);$$

pro $N = 2,\ \alpha = (2,1)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}\,.$$

38.2. Definice. Nechť k je celé nezáporné číslo. Každé dvojici $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ přiřazujeme číslo $(u,v)_{k,\Omega}$ dané vztahem

$$(u,v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}X\,, \tag{38.3}$$

kde sumace přes $|\alpha| \leq k$ znamená, že je třeba vyčerpat všechny navzájem různé vektory tvaru (38.1), pro něž platí $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leq k$.

Příklad. V případě $N = 2,\ k = 2$ je třeba vyčerpat všechny dvojrozměrné multiindexy

$$\begin{gathered}(0,0),\\ (1,0),(0,1),\\ (2,0),(1,1),(0,2),\end{gathered}$$

takže z (38.2) a (38.3) dostaneme

$$(u,v)_{2,\Omega} = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\mathrm{d}X +$$

$$+ \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\,\mathrm{d}X\,.$$

38.3. Lemma. *Vztah* (38.3) *definuje na lineárním prostoru* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *skalární součin.*

Důkaz. První dvě vlastnosti skalárního součinu plynou z vlastností integrálů a derivací:

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha u \,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_\Omega D^\alpha(au_1 + bu_2) D^\alpha v \,\mathrm{d}x = a\int_\Omega D^\alpha u_1 D^\alpha v \,\mathrm{d}x + b\int_\Omega D^\alpha u_2 D^\alpha v \,\mathrm{d}x\,.$$

Co se týče třetí vlastnosti skalárního součinu, je podle (38.3)

$$(u,u)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{38.4}$$

Zároveň je vidět, že vztah $(u,u)_{k,\Omega} = 0$ platí právě tehdy, když každý ze sčítanců v (38.4) je roven nule; odtud zejména plyne

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

čili $u(x) \equiv 0$ v Ω (protože $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$), takže i třetí vlastnost skalárního součinu je plně splněna. $\square$

38.4. Definice. Zavedeme-li v lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$ skalární součin $(u,v)_{k,\Omega}$ daný vztahem (38.3), dostaneme unitární prostor, který označíme $S_2^k(\Omega)$. Normu v $S_2^k(\Omega)$ zavedeme obvyklým způsobem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in S_2^k(\Omega) \tag{38.5}$$

a vzdálenost (metriku) vztahem

$$\varrho(u,v) := \|u-v\|_{k,\Omega} \quad \forall u,v \in S_2^k(\Omega)\,. \tag{38.6}$$

Poznámka. Unitární prostor $S_2^k(\Omega)$ je také lineárním normovaným prostorem a metrickým prostorem.

Poznámka. Pro $k = 0$ dostáváme skalární součin, normu a metriku prostoru $L_2(\Omega)$, tj.

$$(u,v)_{0,\Omega} = (u,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall u,v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{atd.} \tag{38.7}$$

38.5. Lemma. *Nechť* $u \in S_2^k(\Omega)$, *kde hranice* $\partial\Omega$ *je po částech hladká (ve smyslu Definice 37.1); tj.* $\partial\Omega$ *může mít body vratu. Potom pro* $1 \le |\alpha| \le k$ *platí*

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{38.8}$$

Důkaz. Protože oblast Ω může mít body vratu, nelze na levou stranu vztahu (38.8) přímo aplikovat Greenovu větu či některý z jejích důsledků. Podle vlastností (kompaktního) nosiče (viz Definici 37.7 a Poznámku 37.7a) však platí

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}X = \int_{\text{cover}\,\varphi} \varphi D^\alpha u \mathrm{d}X\,,$$

kde $\operatorname{cover}\varphi \subset \Omega$ je uzavřená oblast definovaná v Poznámce 37.7a, jejíž hranice $\partial(\operatorname{cover}\varphi)$ je po částech hladká (ve smyslu Definice 37.1) a nemá body vratu. Tedy podle Věty 37.5 (důsledek Greenovy věty) pro každé j, kde $1 \le j \le N$, platí (zde $N = 2$)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\text{cover}\,\varphi} \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \mathrm{d}X = \int_{\partial(\text{cover}\,\varphi)} u\varphi n_j \mathrm{d}s - \int_{\text{cover}\,\varphi} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\mathrm{d}X = \\ = -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}X\,,$$

protože $\varphi = 0$ na $\partial(\operatorname{cover}\varphi)$. Tím je vztah (38.8) dokázán v případě $|\alpha| = 1$ a $N = 2$.

V případě $N = 3$ užijeme místo Věty 37.5 Větu 37.6i (důsledek Ostrogradského věty)); její předpoklad je splněn: zde roli uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ přebírá $\operatorname{cover}\varphi$ a v roli oblasti $\widetilde{\Omega}$ přímo vystupuje oblast Ω.

Protože $D^\alpha\varphi = 0$ na $\partial(\operatorname{cover}\varphi)$ pro $|\alpha| \ge 0$, dostaneme vztah (38.8) v obecném případě opakováním užitého postupu. Např., pro $\alpha = (1,1)$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\partial(\text{cover}\,\varphi)} \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi n_2 \mathrm{d}s - \int_{\text{cover}\,\varphi} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\mathrm{d}x = -\int_{\text{cover}\,\varphi} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\mathrm{d}x = \\ = -\int_{\partial(\text{cover}\,\varphi)} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_1 \mathrm{d}s + \int_{\text{cover}\,\varphi} u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\partial x_2}\mathrm{d}x = \int_\Omega u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\partial x_2}\,\mathrm{d}X\,,$$

což je vztah (38.8) pro $\alpha = (1,1)$. Jak se postupuje v obecném případě, je již zřejmé. $\square$

Derivace funkcí patřících do $L_2(\Omega)$ obecně nemají v každém bodě oblasti Ω (klasické) derivace. Vlastnost uvedená v Lemmatu 38.5 nás však vede k tomu, abychom zavedli tuto definici:

38.6. Definice. Nechť $u \in L_2(\Omega)$ je libovolná funkce. Pokud existuje funkce $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$, která splňuje vztahy

$$\int_\Omega \varphi u^{(\alpha)} \,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k, \tag{38.9}$$

potom ji budeme nazývat *zobecněnou derivací typu* (α) funkce $u \in L_2(\Omega)$.

38.7. Poznámka. Protože $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$, je $u^{(\alpha)}$ definována na Ω pouze téměř všude, tj. může existovat množina E_u, pro jejíž míru platí $\operatorname{meas}_N E_u$, kde funkce $u^{(\alpha)}$ není definována. Tím se zobecněná derivace odlišuje od klasické derivace: Klasická derivace je definována bodově, kdežto zobecněná derivace je definována na oblasti Ω až na množinu míry nula.

38.8. Věta. *Funkce $u^{(\alpha)}$ jsou jednoznačně určeny funkcí u (ve smyslu prostoru $L_2(\Omega)$).*

Důkaz. Skutečně, mějme dvě funkce u, $\widetilde{u} \in H^k(\Omega)$, pro které platí $u = \widetilde{u}$ v $L_2(\Omega)$. Potom podle (38.9) platí

$$\int_\Omega \varphi u^{(\alpha)}\,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha \varphi\,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k,$$

$$\int_\Omega \varphi \widetilde{u}^{(\alpha)}\,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha \varphi\,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k.$$

Protože $u = \widetilde{u}$ v $L_2(\Omega)$, dostáváme odečtením těchto dvou vztahů

$$\int_\Omega (u^{(\alpha)} - \widetilde{u}^{(\alpha)})\varphi\,\mathrm{d}X = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Protože lineál $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$ (viz větu 37.17), plyne odtud podle věty 37.19

$$\widetilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)} \quad \text{v } L_2(\Omega)$$

pro každý multiindex α $(1 \le |\alpha| \le k)$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

38.9. Označení. Vzhledem k vlastnosti uvedené ve Větě 38.8 budeme značit zobecněné derivace $u^{(\alpha)}$ funkce u stejně jako klasické derivace symbolem $D^\alpha u$ (viz (38.2)).

38.10. Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ značí libovolnou ohraničenou oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ se skládá z konečného počtu hladkých částí.[2] Symbolem $H^k(\Omega)$ (nebo obšírněji $H^{k,2}(\Omega)$) budeme značit normovaný prostor funkcí $u \in L_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace $u^{(\alpha)} \equiv D^\alpha u \in L_2(\Omega)$[3] pro všechna $|\alpha| \le k$, s normou $\|\cdot\|_{k,\Omega}$. Tento prostor budeme nazývat *Sobolevovým prostorem.*

Uvedeme nyní bez důkazu dvě důležité vlastnosti Sobolevových prostorů $H^k(\Omega)$.

38.11. Věta. *Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$ jsou úplné.*

38.12. Věta. *Nechť oblast Ω má spojitou hranici ve smyslu Nečase (tj. jsou přípustné body vratu, nikoliv však řezy. Potom lineární prostor $C^\infty(\overline{\Omega}) = \mathcal{E}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^N)$ je hustý v $H^k(\Omega)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. (Připomínáme, že $\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^N)$ označuje lineární prostor restrikcí funkcí, které náležejí do $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, na uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$, kde $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ je lineární prostor funkcí definovaných na $\mathbb{R}^N$ a nekonečně mnohokrát spojitě diferencovatelných.)*

Uvedeme nyní jeden příklad funkce, která náleží do $H^1(\Omega)$, ale nemá ve všech bodech oblasti Ω klasické derivace prvního řádu. Začneme definicí:

[2]Tedy nepožadujeme, aby $\partial\Omega$ byla po částech hladká ve smyslu Definice $\mathcal{P}$.1.

[3]tj. funkce $u^{(\alpha)}$, které splňují vztah (38.9)

38.13. Definice. Říkáme, že funkce $f(x_1, \dots, x_N)$ je po částech spojitá v ohraničené oblasti Ω, jestliže existuje konečný počet oblastí $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ s vlastnostmi

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j\,, \quad \Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset \quad (r \neq s;\ r, s = 1, \dots, m), \tag{38.10}$$

ve kterých je funkce $f(x_1, \dots, x_N)$ spojitá.

38.14. Lemma. *Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ má po částech spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť podoblasti $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, ve kterých jsou derivace $\partial w/\partial x_r$ $(r = 1, \dots, N)$ spojité, mají po částech hladké hranice $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$, které nemají body vratu. Potom $w \in W_2^1(\Omega)$, přičemž zobecněné první derivace $\partial w/\partial x_r$, které náležejí do $L_2(\Omega)$, jsou v každé podoblasti Ω_j $(j = 1, \dots, m)$ rovny klasickým derivacím $\partial w/\partial x_r$ $(r = 1, \dots, N)$.*

Důkaz. Nechť $\overrightarrow{n}(\Omega_j)$ je jednotková vnější normála podoblasti Ω_j $(j = 1, \dots, m)$ a $n(\Omega_j)_1, \dots, n(\Omega_j)_N$ její složky. Protože

$$\overrightarrow{n}(\Omega_p) = -\overrightarrow{n}(\Omega_q) \tag{38.11}$$

na společné části hranic uzavřených oblastí $\overline{\Omega}_p$, $\overline{\Omega}_q$ (viz Obr. 38.1), dostaneme pomocí věty 37.5 (tj. důsledku Greenovy věty) pro funkci

$$g_r(x) = \frac{\partial w}{\partial x_r}(x), \quad x \in \Omega_j \quad (j = 1, \dots, m),$$

kde $\partial w/\partial x_r$ je klasická derivace, postupně tyto vztahy:

$$\int_\Omega g_r \varphi \,\mathrm{d}X = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} \frac{\partial w}{\partial x_r} \varphi \,\mathrm{d}X = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{\partial\Omega_j} w\varphi n(\Omega_j)_r \,\mathrm{d}s - \int_{\Omega_j} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \,\mathrm{d}X \right) =$$

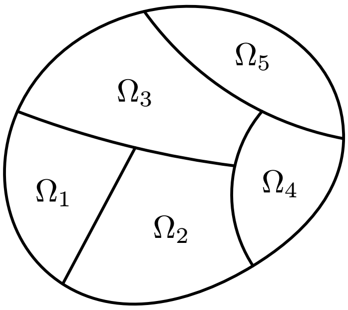
$$= \int_{\partial\Omega} w\varphi n_r \,\mathrm{d}s - \int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \,\mathrm{d}X = -\int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

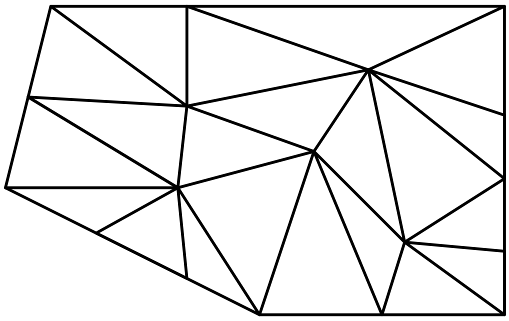
kde n_r označuje r-tou složku jednotkové vnější normály k $\partial\Omega$. (Třetí rovnost plyne z toho, že ve vnitřku Ω se podle (38.11) křivkové integrály na společných částech hranic $\partial\Omega_p$, $\partial\Omega_q$ ruší – viz Obr. 38.1.) Tedy $g_1, \dots, g_N$ jsou první zobecněné derivace funkce w, protože jsou též ohraničené:

Počet m podoblastí $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ je konečný, takže z ohraničenosti a spojitosti derivací $\partial w/\partial x_r$ v Ω_j $(j = 1, \dots, m)$ plyne

$$\int_\Omega g_r^2 \,\mathrm{d}X = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_r} \right)^2 \mathrm{d}X < \infty \quad (r = 1, \dots, N).$$

Tedy $g_r \in L_2(\Omega)$. $\square$





Obr. 38.1 a Obr. 38.2

V Důsledku 38.16 uvedeme funkce, které vyhovují podmínkám Lemmatu 38.14 a které se užívají v metodě konečných prvků. Tím se ukáže význam Lemmatu 38.14 pro tuto metodu. Nejprve však musíme zavést v Definici 38.15 pojem triangulace oblasti.

38.15. Definice. Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má polygonální hranici. Množina

$$\mathcal{T} = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_p\}$$

sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků $\overline{T}_j$ se nazývá triangulací oblasti $\overline{\Omega}$, jestliže splňuje tyto dvě podmínky:

a) platí

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{p} \overline{T}_j \ :$$

b) libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i, \overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu (viz Obr. 38.2).

38.16. Důsledek. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ je polynomem na každém trojúhelníku triangulace $\mathcal{T}$. Potom $w \in H^1(\Omega)$. Kromě toho, ve vnitřku T_j každého trojúhelníka $\overline{T}_j \in \mathcal{T}$ je zobecněná derivace $\partial w/\partial x_i$ rovna klasické derivaci $\partial w/\partial x_i$ $(i = 1, 2)$.*

Nyní se zmíníme o Sobolevových prostorech $H^{k,p}(\Omega)$. Pro základní aplikace jsou prostory $H^k(\Omega)$ dostatečné. Nicméně, je vhodné zmínit se také o prostorech $H^{k,p}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$, jejichž částečným případem pro $p = 2$ jsou prostory $H^k(\Omega)$.

38.17. Definice. Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$ (v případě $N = 2$ ve smyslu Definice 37.1). Symbol $H^{k,p}(\Omega)$ označuje normovaný prostor funkcí $u \in L_p(\Omega)$, které mají zobecněšné derivace $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ pro všechna $|\alpha| \le k$. Norma je definována v tomto prostoru vztahem

$$\|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} \equiv \|u\|_{k,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \mathrm{d}X \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

39. Motivace: Převedení okrajového problému eliptické parciální diferenciální rovnice na variační formulaci

Uvažujme tento okrajový problém pro Poissonovu rovnici:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{39.1}$$

$$u = \overline{u} \quad \text{on } \Gamma_1 \,, \tag{39.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{on } \Gamma_2 \,, \tag{39.3}$$

kde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega \quad (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset)$$

a $f\,, \overline{u}\,, q$ jsou dané funkce. Výraz

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \tag{39.4}$$

je derivace funkce u podle jednotkové vnější normály $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$.

Násobme rovnici (39.1) libovolnou funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{na } \Gamma_1\} \tag{39.5}$$

a integrujme výsledek přes Ω:

$$-\int_\Omega v \Delta u \, \mathrm{d}X = \int_\Omega v f \, \mathrm{d}X \,. \tag{39.6}$$

Greenova věta (see $\mathcal{P}$.5) aplikovaná na integrál na levé straně vztahu (39.6) dává

$$-\int_\Omega v \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big) \, \mathrm{d}X =$$

$$= -\int_\Omega \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big(v \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big) + \frac{\partial}{\partial x_2} \Big(v \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big) \Big\} \, \mathrm{d}X + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big) \, \mathrm{d}X =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} v \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \Big) \, \mathrm{d}s + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big) \, \mathrm{d}X \,.$$

Podle (39.4), (39.5) a (39.3) platí

$$\int_{\partial\Omega} v \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \Big) \, \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} v q \, \mathrm{d}s \,.$$

Tedy vztah (39.6) může být psán ve tvaru

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big) \, \mathrm{d}X = \int_\Omega v f \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_2} v q \, \mathrm{d}s \,. \tag{39.7}$$

Dospěli jsme k tomuto problému: Nalézt funkcí u, která splňuje okrajovou podmínku (39.2) a vyhovuje integrálnímu vztahu (39.7) pro všechny funkce $v \in V$ (viz (39.5)). $\square$